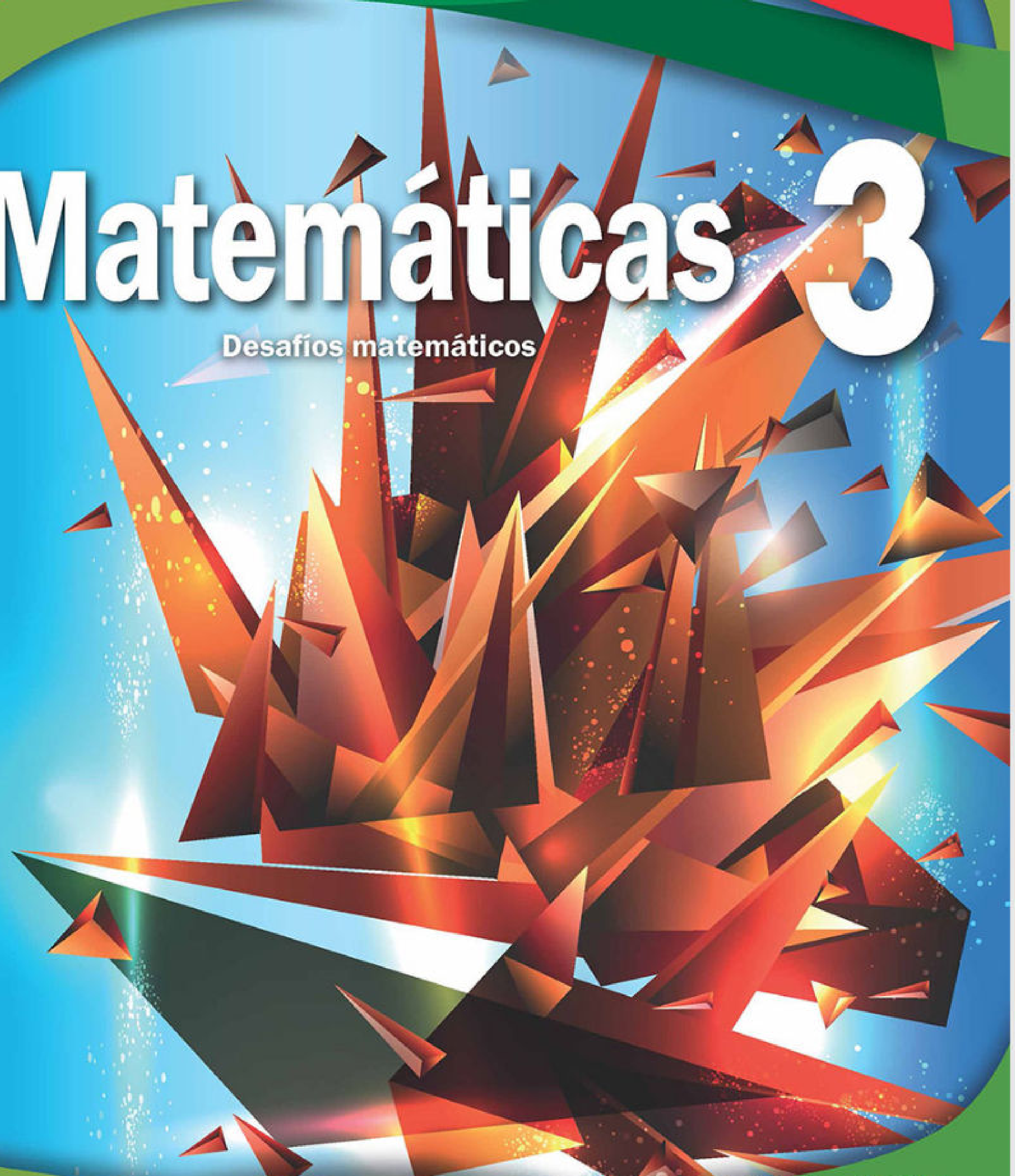
Secundaria

Matemáticas 3

Desafíos matemáticos



Ramírez • Castillo
Vergara • Flores • Azpeitia

Serie Innovación

FERNÁNDEZ editores

Presentación

Presentación al profesor

La tarea de crear un ambiente propicio para que los alumnos formulen y validen conjeturas, planteen preguntas, utilicen procedimientos propios para resolver problemas y adquieran las herramientas y los conocimientos matemáticos, recae en el profesor. Por tal motivo hemos diseñado *Matemáticas 3, Desafíos matemáticos* como una herramienta para tu quehacer docente, la cual te facilitará dar seguimiento a los procesos de aprendizaje de tus alumnos en su desenvolvimiento diario, donde ejerciten constantemente las competencias matemáticas para su desarrollo personal y que, incluso, lo lleven a la acción reflexiva dentro de su comunidad.

Este libro tiene la finalidad de despertar y desarrollar en los alumnos la curiosidad y el interés por investigar y resolver problemas, acrecentar su creatividad para formular conjeturas y su flexibilidad para modificar sus puntos de vista y autonomía intelectual para enfrentarse a situaciones desconocidas. Para lograrlo, los contenidos se presentan bajo una estructura de estrategias didácticas interrelacionadas que desarrollan, a través de diversas actividades, las cuatro competencias matemáticas propias de este nivel: Resolver problemas de manera autónoma, Comunicar información matemática, Validar procedimientos y resultados, y Manejar técnicas eficientemente.

La misma estructura didáctica invita a los alumnos a recuperar permanentemente sus ideas previas, a construir su propio aprendizaje, a desarrollar habilidades para aprender a utilizar las tecnologías a su alcance y a validar sus propios avances. Te sugerimos darles tiempo para la reflexión, el análisis y la confrontación de los procedimientos empleados, propiciando de esta forma la socialización, lo que les permitirá ampliar su panorámica para encontrar estrategias más sencillas y prácticas y así obtener resultados correctos, sin olvidar que no se trata de aprender matemáticas para después aplicarlas en la resolución de ciertos problemas, sino de aprenderlas al resolver diversos tipos de problemas.

El contenido de *Matemáticas 3 Desafíos matemáticos* se divide en cinco bloques y lecciones estructurales que abordan el estudio de la aritmética y el álgebra (Sentido numérico y pensamiento algebraico), la geometría (Forma, espacio y medida) y la información probabilística y estadística aplicada a diversos fenómenos de la vida real (Manejo de la información).

A través de esta propuesta en la que se induce al trabajo individual, en parejas, en equipo o grupal, estamos convencidos que a través de tu orientación, los alumnos desarrollarán sus competencias mientras aprenden matemáticas de manera agradable.

Los autores

FERNÁNDEZ editores

Presentación al alumno

Matemáticas 3, Desafíos matemáticos es una herramienta que te servirá de guía en éste tu último curso de matemáticas, que forma parte de tu educación básica. El contenido se centra en desarrollar los procesos de aprendizaje que requieres consolidar mediante una estructura que engloba múltiples recursos y estrategias didácticas diseñadas para despertar tu interés e invitarte a reflexionar sobre las diferentes formas en que puedes resolver un problema y validar los resultados.

Conforme avances en el estudio de este libro, te darás cuenta de lo interesante, útil y divertido que es aprender matemáticas. Las lecciones que integran cada uno de los cinco bloques, han sido pensadas con la intención de que las actividades sean una verdadera aventura para ti, en ellas estudiarás aspectos básicos relacionados con aritmética, álgebra, geometría, probabilidad y estadística.

Asimismo, las actividades te permitirán desarrollar las competencias que se pretenden lograr en este grado y despertar tu interés en los contenidos. Los ejercicios planteados son para que recuerdes tus conocimientos previos y con base en éstos construyas nuevos. También para que aprendas diferentes procedimientos encaminados a la resolución de situaciones problemáticas.

Por otra parte, *Matemáticas 3. Desafíos matemáticos* tiene la finalidad de apoyarte en el desarrollo de cuatro competencias matemáticas: Resolver problemas de manera autónoma, Comunicar información matemática, Validar procedimientos y resultados, y Manejar técnicas eficientemente, las cuales contribuirán a tu desarrollo personal dentro de una sociedad plural que es partícipe de un mundo interdependiente y culturalmente diverso.

Los autores

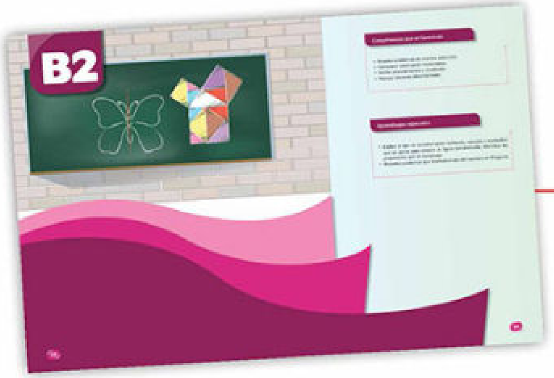
FERNÁNDEZ editores

Guía de uso

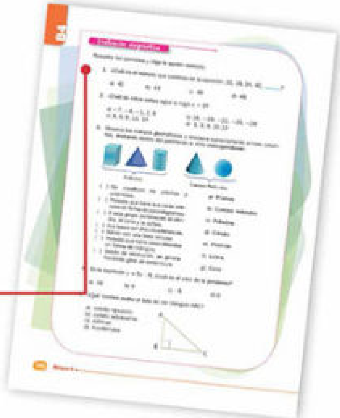
El texto que tienes en tus manos se divide en cinco bloques conformados por lecciones, las cuales se diseñaron con la finalidad que desarrolles habilidades, adquieras conocimientos y, al final, logres medir tus avances. Con la intención de que utilices este libro de manera práctica, te presentamos la Guía de uso.

Dosificación de contenido

Son cinco tablas, una por bloque, en éstas, se presentan los temas y su distribución por páginas, así como una calendarización para facilitar su organización.

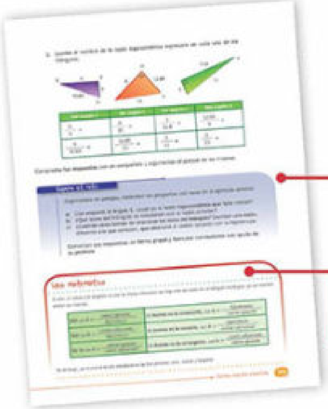


Inicio de Bloque Al comienzo de cada bloque se encuentra la lista de aprendizajes esperados que se pretende alcances, así como las competencias que desarrollarás con el estudio de los contenidos.



Evaluación diagnóstica

Esta evaluación te ayudará a identificar tu dominio de los conocimientos básicos para aprovechar de forma adecuada el contenido de cada lección.

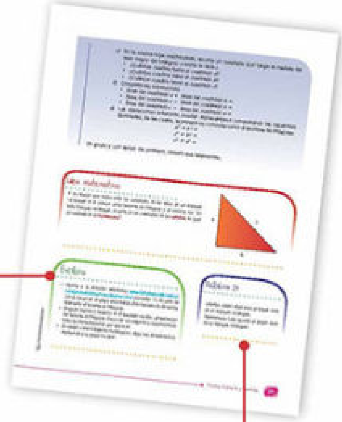


Supera el reto

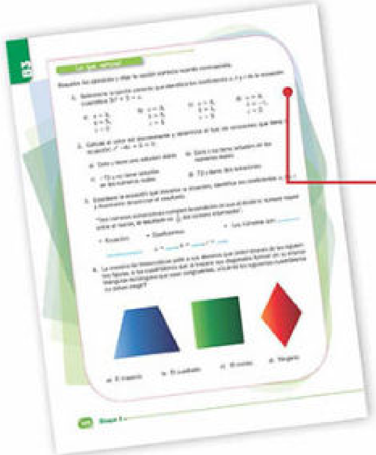
Esta sección contiene actividades medulares que te ayudarán a ejercitarte para alcanzar los aprendizajes esperados. Presta especial atención a los retos.

Idea matemática: Esta cápsula incluye información y teoría matemática relevante. Será de gran ayuda para mejorar tus habilidades y reforzar tus aprendizajes.

Cápsula Explora: En ella se sugieren direcciones electrónicas sobre diversos temas relacionados con la lección que estés estudiando.



Palabra pi: En esta cápsula se proporciona el significado de términos o palabras que aparecen por primera vez en el texto y que pueden resultar de difícil compresión.

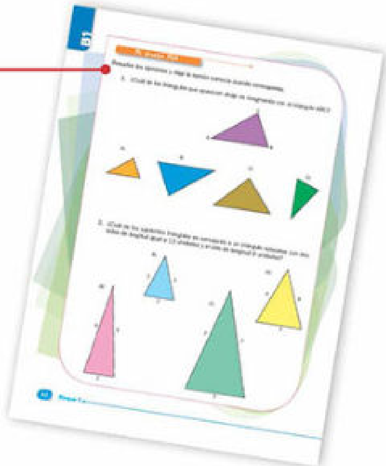


Lo que aprendí

Es la evaluación que realizarás al final de cada bloque. Su intención es que apliques los conocimientos adquiridos e identifiques tus logros.

Mi prueba PISA

Tiene la finalidad de evaluar las competencias que has desarrollado con tu trabajo a lo largo del bloque. Con ella, tu profesor puede obtener información que lo ayudará a identificar los avances del grupo. Asimismo, tiene el objetivo de alcanzar el nivel 3 en la escala de la evaluación del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA por sus siglas en inglés).



Índice

Índice

Dosificación de contenidos

	Eje temático	Tema	Contenidos matemáticos	Páginas	Semana	Mes
BLOQUE 1	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	19-22	1	Agosto inicio / fin
	Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	23-26	2	Agosto inicio / fin
			Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	27-39	3	Septiembre inicio / fin
	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	40-45	4	Septiembre inicio / fin
			Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	46-48	5	Septiembre inicio / fin
		Nociones de probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	49-54	6	Septiembre inicio / fin
		Análisis y representación de datos	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	55-59	7	Octubre inicio / fin
					8	Octubre inicio / fin
	Evaluación final			60-63	8	

BLOQUE 2

Eje temático	Tema	Contenidos matemáticos	Páginas	Semana	Mes
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	68-75	9	Octubre inicio fin
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	76-84	10	Octubre inicio fin
		Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	85-95	11	Noviembre inicio fin
				12	Noviembre inicio fin
	Medida	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	96-99	13	Noviembre inicio fin
		Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	100-104	14	Noviembre inicio fin
Manejo de la información	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	105-109	15	Diciembre inicio fin
Evaluación final			110-113	15	

BLOQUE 3

Eje temático	Tema	Contenidos matemáticos	Páginas	Semana	Mes
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	118-123	16	Diciembre inicio fin
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	124-128	17	Diciembre inicio fin
		Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	129-137	18	Enero inicio fin
		Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	138-144	19	Enero inicio fin
				20	Enero inicio fin
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	145-150	21	Febrero inicio fin
		Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	151-154	22	Febrero inicio fin
	Nociones de probabilidad	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	155-159	23	Febrero inicio fin
Evaluación final			160-163	23	

DOSIFICACIÓN DE CONTENIDOS

BLOQUE 4

Eje temático	Tema	Contenidos matemáticos	Páginas	Semana	Mes
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	168-174	24	Febrero inicio / fin
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	175-179	25	Marzo inicio / fin
	Medida	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	180-184	26	Marzo inicio / fin
		Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	185-191	27	Marzo inicio / fin
		Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	192-197	28	Abril inicio / fin
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	198-203	29	Abril inicio / fin
				30	Abril inicio / fin
	Análisis y representación de datos	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	204-207	31	Mayo inicio / fin
Evaluación final			208-211	31	

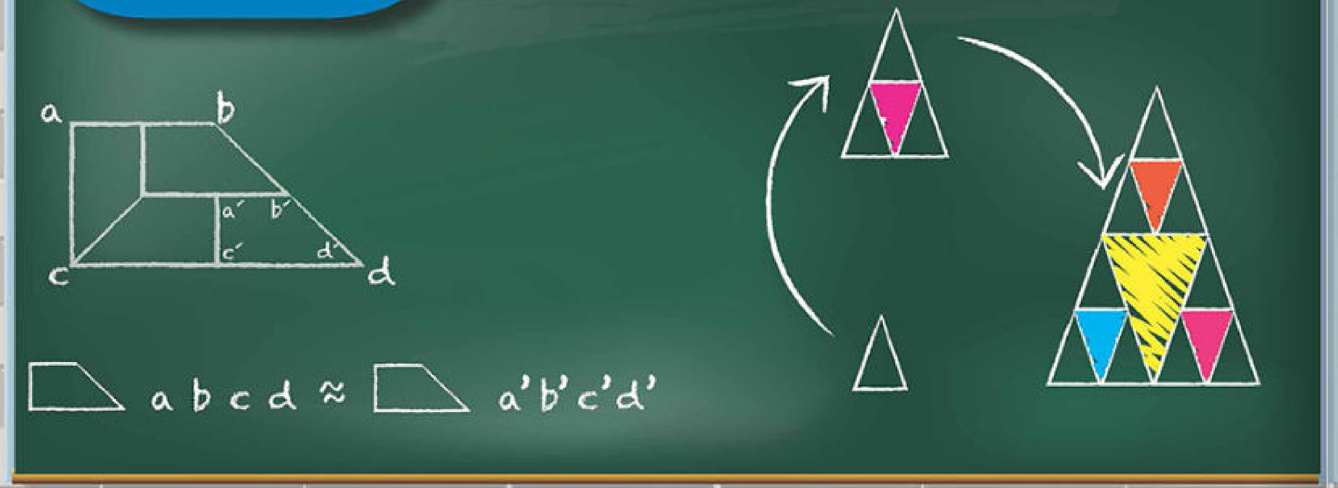
FERNÁNDEZ editores

BLOQUE 5

Eje temático	Tema	Contenidos matemáticos	Páginas	Semana	Mes
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	215-218	32	Mayo inicio / fin
Forma, espacio y medida	Medida	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	219-225	33	Mayo inicio / fin
				34	Mayo inicio / fin
		Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	226-232	35	Junio inicio / fin
		Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	233-236	36	Junio inicio / fin
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	237-240	37	Junio inicio / fin
	Nociones de probabilidad	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	241-243	38	Junio inicio / fin
Evaluación final			246-247	38	

FERNÁNDEZ editores

B1



Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes

B1

Evaluación diagnóstica

Resuelve los ejercicios y elige la respuesta correcta.

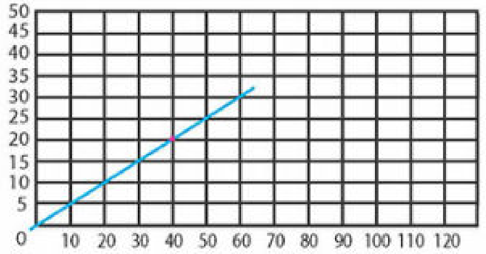
1. ¿En cuál de los siguientes casos podemos asegurar que dos triángulos son congruentes?
   a) Si tienen tres lados proporcionales
   b) Si tienen sus tres ángulos correspondientes iguales
   c) Si tienen dos ángulos iguales y sus tres lados proporcionales
   d) Si tienen sus tres pares de lados correspondientes de la misma medida

2. ¿En qué casos se construyen triángulos semejantes?
   I. El triángulo ABC que es cortado por una recta perpendicular a uno de sus lados.
   II. Dos triángulos, ABC y A'B'C', donde los lados del triángulo A'B'C' miden el doble de los lados del triángulo ABC.
   III. Dos triángulos, PQR y P'Q'R', que tienen lados respectivamente proporcionales.
   IV. Dos triángulos, MNP y M'N'P', que tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.

   a) I, II, III   b) I, II, IV   c) I, III, IV   d) II, III, IV

3. Escribe la expresión algebraica que representa los datos de la siguiente gráfica.

   ____



4. Escribe la expresión algebraica que representa los datos de la siguiente tabla.

x	5	8	11	14	17
y	25	64	121	196	289

5. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha azul de una bolsa que contiene 5 fichas azules, 4 rojas, 3 blancas y 8 amarillas?

   a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{3}$

6. Son medidas de tendencia central:
   a) Central, moda, mediana, desviación estándar
   b) Rango, promedio, intervalo
   c) Moda, mediana, media aritmética
   d) Rango, mediana, frecuencia

Patrones y ecuaciones

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

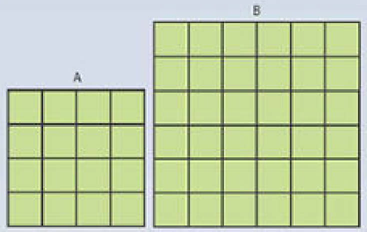
Lección 1. Uso de ecuaciones cuadráticas sencillas

Supera el reto

¿Recuerdas qué es un polígono?

Un polígono es una porción de un plano limitada por segmentos de recta, denominados lados. Los cuadrados son polígonos con lados y ángulos iguales; además, tienen dos dimensiones, ¿cuáles son?

Los siguientes polígonos están formados por cuadrados pequeños de 1 cm² de área.



1. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuál es el área de la figura A? ¿Qué superficie ocupa la figura B?
   b) ¿Cuánto mide cada lado de la figura A y B?
   c) ¿Cómo supiste cuáles son las medidas de cada lado de ambas figuras?
   d) En una vidriería se encarga un espejo de forma cuadrada que tenga una superficie de 900 cm². Explica brevemente el procedimiento que seguirías para determinar sus dimensiones antes de cortarlo. Puedes usar una calculadora. ¿Cuánto debe medir cada lado de este espejo?
   e) Escribe una expresión algebraica que te permita conocer la medida de cada lado de un cuadrado cualquiera cuando conoces su área.

   Comenta con el grupo tus respuestas y el procedimiento que empleaste para obtenerlas. Con la ayuda de su profesor, concluyan cuáles fueron las respuestas más adecuadas.

2. Reúnete con un compañero y resuelvan los siguientes problemas. Anoten las respuestas en sus cuadernos.
   a) Un rectángulo tiene un área de 12 cm², ¿cuáles serán sus dimensiones si la base mide el triple de su altura? (Debes indicar el largo y la altura).
      Expliquen el procedimiento que emplearon para resolver el problema y coméntenlo con otra pareja.
   b) Si la altura del rectángulo se denota con la letra x:
      - ¿Cómo se expresa la medida del largo?
      - Formulen una ecuación que se utilice para encontrar el valor de x.
      - Resuelvan la ecuación en su cuaderno.

      Comparen los resultados obtenidos en este con los resultados del inciso anterior.
   c) Determinen las dimensiones de su salón de clases y su superficie.
      Comprueben los resultados con los demás compañeros. ¿Por qué hubo pequeñas o grandes variaciones en los resultados?

Idea matemática

Un procedimiento para resolver este tipo de problemas puede ser por "tanteo" (ensayo y error). Otro método es mediante ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, en las cuales el exponente mayor de la incógnita es 2; es decir, alguno de los términos tiene la incógnita elevada al cuadrado. Existen diversos procedimientos para resolver una ecuación de segundo grado. Uno es el de la operación inversa, por ejemplo, la ecuación:

$$x^2 - 5 = 220$$

Es posible simplificarla de la siguiente forma:

$$x^2 = 225$$

Posteriormente obtenemos la raíz cuadrada en ambos miembros para determinar el valor de x, pues la raíz cuadrada es la operación inversa del exponente cuadrático.

Con ayuda del profesor, analicen el siguiente procedimiento de resolución de una ecuación cuadrática por medio de la operación inversa. En los espacios en blanco expliquen con palabras el porqué de cada paso.

Planteamiento del problema en lenguaje algebraico	Justificación
$A = bh$	El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.
$A = (3x)(x)$	
$12 = (3x)x$	
$12 = 3x^2$	
$\frac{12}{3} = \frac{3x^2}{3} =$	
$4 = x^2$	
$\sqrt{4} = \sqrt{x^2}$	El valor que se busca es x, no x^2, por lo tanto, se extrae la raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad para que ésta no se altere.
$\pm 2 = x$	
Altura = 2	
Largo = (3)(2)	

1. Reflexionen y completen en sus cuadernos las respuestas.
   - $2^2 = 4$ $(-2)^2 =$ ______
   - ¿Por qué se considera que $\sqrt{4} = \pm 2$? ______
   - Entonces $\sqrt{81} =$ ______, es decir, la raíz cuadrada de 81 puede ser ______
   - $\sqrt{49} =$ ______ porque ______ y $\sqrt{121} =$ ______ porque ______

- ¿Cuál es la operación inversa de elevar al cuadrado?
- ¿Cuáles son los posibles resultados de $\sqrt{x^2}$? ¿Por qué?
- La operación inversa de elevar al cuadrado es obtener la ______.
- Al extraer la raíz cuadrada de un número cualquiera, se consideran dos posibles soluciones: una ______ y la otra ______.
- ¿Por qué crees que en la solución del problema anterior se considera el valor positivo de la raíz cuadrada y no el negativo?

Coméntenlo en forma grupal y lleguen a una conclusión con ayuda de su profesor. Como han observado a lo largo de la lección, algunos problemas pueden resolverse traduciéndolos a una ecuación cuadrática.

2. Traduzcan cada uno de los siguientes problemas en una ecuación. Escriban las expresiones en sus cuadernos.
   a) El cuadrado de un número menos 5 es igual a 220.
   b) Maru pensó un número, lo elevó al cuadrado, multiplicó el resultado por 4 y obtuvo 100.
   c) El cuadrado de un número menos el doble del mismo número es igual a 24. Al multiplicar dos **números consecutivos** se obtiene 306.

Palabra pi

números consecutivos. Son los que se obtienen sumando uno al anterior. Son ejemplo de éstos 7 y 8, 200 y 201, 23 y 24.

Comparen con otra pareja sus planteamientos e interpreten las ecuaciones que establecieron. Verifiquen que estén correctamente planteadas y que representen lo mismo aunque estén escritas de manera diferente.

3. Resuelvan en su cuaderno cada una de las ecuaciones anteriores con el procedimiento que prefieran, expliquen los pasos que siguieron. Revisen en forma grupal los resultados obtenidos y posteriormente contesten las preguntas:
   a) ¿Utilizaron el mismo método para resolver todas las ecuaciones?
   b) ¿Cuál es la diferencia entre las ecuaciones que plantearon en los incisos a), b) y c) anteriores?
   c) Describan brevemente el procedimiento utilizado para resolver las ecuaciones del inciso c).
   d) ¿Fue más sencillo que el procedimiento de la operación inversa?

En las lecciones siguientes revisarán algunos métodos para resolver ecuaciones cuadráticas de forma más sencilla.

4. Encuentren el valor de la incógnita en cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas, escriban el procedimiento en su cuaderno y en la tabla siguiente sólo anoten el resultado.

$a^2 = 9$	$b^2 + 2 = 443$	$m^2 - 3 = 61$	$x^2 + x = 56$	$7 + 2x^2 = 57$	$64 = \frac{x^2}{4}$	$y(y + 3) = 154$
$a_1 =$ $a_2 =$	$b_1 =$ $b_2 =$	$m_1 =$ $m_2 =$	$x_1 =$ $x_2 =$	$x_1 =$ $x_2 =$	$x_1 =$ $x_2 =$	$y_1 =$ $y_2 =$

Compartan con un compañero cada caso para hallar los valores de la incógnita.

5. Escriban en la segunda columna la ecuación que represente al problema. Resuélvanla en su cuaderno e indiquen el resultado en la última columna.

Problema	Ecuación	Resultado
El cuadrado de un número es igual a su tercera parte más 8. ¿Cuál es ese número?		
Un número dividido entre 3 y elevado al cuadrado es 729, ¿de qué número se trata?		
Un terreno de forma rectangular mide 7 200 m² y el largo mide el doble de su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?		
Si elevas un número al cuadrado y le sumas 5, el resultado es 581, ¿cuál es el número?		

Revisen sus resultados, validen sus procedimientos y, si es necesario, corrijan los errores que encuentren en ellos. Aclaren las dudas al respecto con su profesor.

6. Planteen un problema que se pueda resolver con cada una de las ecuaciones presentadas. Resuelvan, interpreten y comprueben resultados utilizando la calculadora, en caso de requerirla.

$a(a + 3) = 270$	$x^2 + x = 132$	$3b^2 - b = 102$

7. En grupo, lean algunos de los problemas planteados y propongan qué aplicaciones cotidianas pueden tener.

8. Utilicen el procedimiento que mejor les parezca para resolver los siguientes problemas en su cuaderno, usen su calculadora si es preciso.
   a) Encuentren el valor de x en la ecuación: $(x - 5)^2 = 144$
   b) A una pieza de cartón de forma cuadrada (figura 1) se le recortan cuadrados del mismo tamaño en las esquinas para hacer una caja sin tapa con las siguientes medidas: Altura = 10 cm; Volumen = 1 000 cm³. Calculen la medida por lado del cartón que se necesita para hacer la caja (figura 2).
   c) ¿Cuáles fueron los procedimientos que empleaste para resolver los problemas?
   d) ¿Cuál te pareció más práctico? ¿Por qué?

figura 1

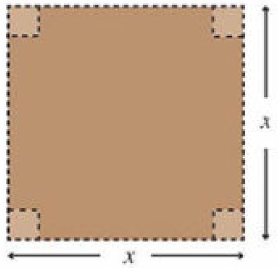
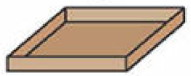


figura 2



9. ¿Qué habilidades consideran que desarrollaron en esta lección? ¿Por qué?

Explora

Ingresa al sitio:
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/ecuacion.htm#4
(Consulta: 8 de junio de 2013).
Busca la sección de Problemas de aplicación, plantea la ecuación necesaria para resolver cada problema que ahí se presenta; posteriormente, resuélvelos por medio de los procedimientos que utilizaste en esta lección y verifica si obtuviste el mismo resultado. Comenta tus respuestas con un compañero.

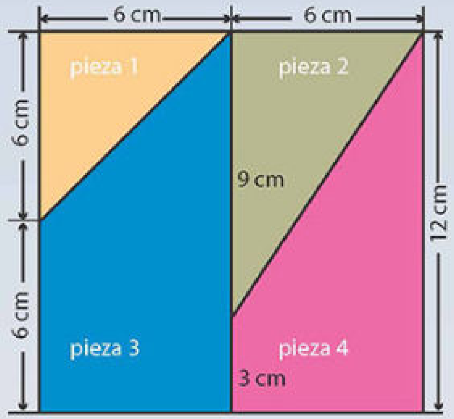
Figuras y cuerpos

Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades

Lección 2. Los rompecabezas

Supera el reto

1. Formen equipos de cuatro personas y observen el rompecabezas A (ver figura). Cada integrante elija una pieza y tracen en un cartoncillo uno congruente al rompecabezas A, con las medidas que se indican; recuerden utilizar escuadras. Después, recorten las piezas.



2. Elaboren un rompecabezas B a escala de A, de tal manera que sus lados midan el doble del rompecabezas A. Repártanse las piezas del rompecabezas. Cada uno hará la ampliación que le tocó. Calculen las medidas de su pieza, dibújenla y recórtenla.

3. Cuando terminen sus piezas, intenten armar el rompecabezas ampliado. Para construir el rompecabezas aplicaron el factor de proporcionalidad ($k = 2$) a las medidas de A; es decir, multiplicaron las medidas por dos para obtener el rompecabezas B.

4. Tracen ahora un rompecabezas C más grande y que sea a escala de A, pero más chico que B. Recuerden que cada quien realiza una pieza.

5. Antes de construir el rompecabezas C, comenten cuál puede ser el factor de proporcionalidad.

6. Copien la siguiente tabla en sus cuadernos, completen las medidas que corresponden a los diferentes lados de las piezas de los rompecabezas y contesten las preguntas.

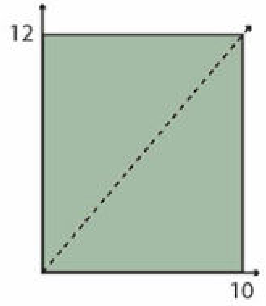
Rompecabezas A	3 cm	6 cm	9 cm	12 cm
Rompecabezas B				
Rompecabezas C				

- ¿Las piezas de los rompecabezas tienen la misma forma?
- ¿Las figuras serán semejantes? ¿Por qué?

1. Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.
   a) Una fábrica de plástico tiene un pedido de bolsas de forma rectangular para guardar dulces; los productores de dulces que las solicitan indican que las bolsas deben tener diferente tamaño, pero ser proporcionales para que no se deforme la imagen de la presentación del producto.
   Completa la tabla que representa una variedad de estas bolsas.

Bolsa	Largo	Ancho
A	10 cm	12 cm
B	15 cm	18 cm
C	20 cm	24 cm
D	25 cm	$y_1 =$
E	$x =$	$y_2 =$

   b) Traza una gráfica con las medidas de las bolsas. De las parejas de datos conocidos, localiza el largo en el eje "x" y el ancho en el eje "y", observa el ejemplo. Puedes comprobar tus resultados de la tabla anterior con la gráfica que obtendrás.



   c) Traza una línea del origen hasta los puntos A, B, C, D y, E. Prolonga lo suficiente.
   d) ¿Cuánto mide el ancho de la bolsa D? ¿Cuál es el largo y el ancho de la bolsa E?
   e) La línea que trazaste divide en dos triángulos a los rectángulos que forman las bolsas, ¿cómo son los triángulos que se forman?
   f) Para asegurarse de que las medidas dadas para las bolsas son proporcionales, se puede dividir la medida del largo entre el ancho de cada bolsa. Completa la tabla.

Bolsa	Largo	Ancho	Proporción
A	10 cm	12 cm	
B	15 cm	18 cm	
C	20 cm	24 cm	
D	25 cm		
E			

   g) Usando la regla de tres y comparando los resultados también se puede comprobar la proporcionalidad. Completen los datos de las siguientes tablas:

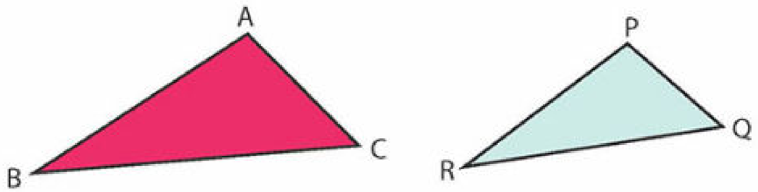
10	12
15	

10	12
24	

10	12
30	

Al comparar los rectángulos que forman las bolsas, expliquen si creen que son semejantes o no y por qué.

2. Observa los siguientes triángulos y contesta lo que se te pide.



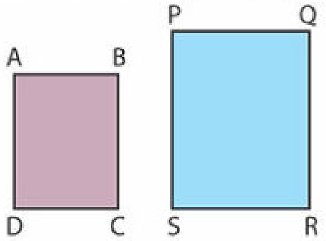
Mide los ángulos	Mide los lados	Compara las medidas de sus lados
Ángulo A =	$\overline{AB}$ =	$\frac{\overline{AB}}{\overline{PR}}$ =
Ángulo B =	$\overline{BC}$ =	
Ángulo C =	$\overline{CA}$ =	$\frac{\overline{BC}}{\overline{QR}}$ =
Ángulo P =	$\overline{PR}$ =	
Ángulo Q =	$\overline{QR}$ =	$\frac{\overline{CA}}{\overline{QP}}$ =
Ángulo R =	$\overline{QP}$ =	

- ¿Cómo son los ángulos A y P?
- ¿Cómo son las razones entre los lados de los triángulos?
- ¿Qué relación hay entre los triángulos ABC y PQR?

Idea matemática

Dos polígonos son semejantes si tienen respectivamente sus ángulos congruentes y si sus lados correspondientes son proporcionales. La razón de semejanza es una constante. Para indicar que los polígonos son semejantes, se utiliza el símbolo ~.

En la siguiente imagen se tiene que:



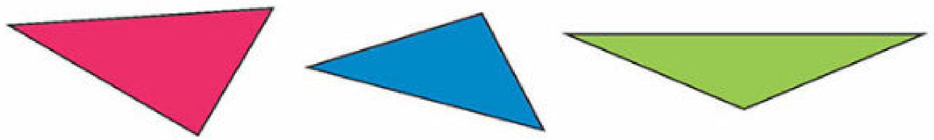
$\measuredangle A \cong \measuredangle P$, $\measuredangle B \cong \measuredangle Q$, $\measuredangle C \cong \measuredangle R$ y $\measuredangle D \cong \measuredangle S$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

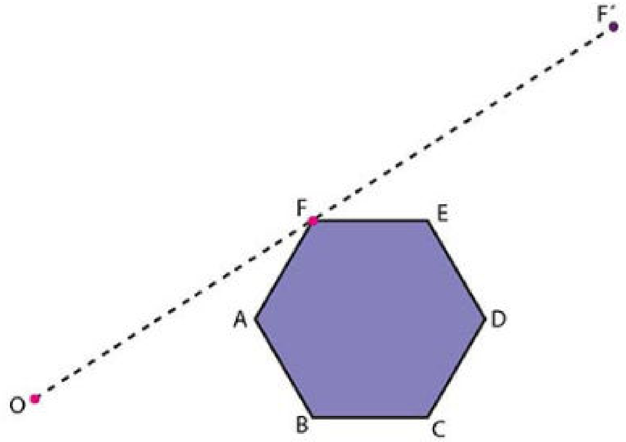
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

De donde la razón de semejanza es $\frac{2}{3}$. Además, los ángulos son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales, por lo tanto, el rectángulo ABCD es semejante al rectángulo PQRS. Esto es, ▭ABCD ~ ▭PQRS.

3. Escoge dos de los triángulos que se presentan abajo. Utiliza regla y compás para trazar en tu cuaderno dos triángulos semejantes para cada triángulo que elegiste. Uno debe ser más pequeño en área y otro más grande. No olvides anotar claramente las razones por las cuales los triángulos que dibujarás cumplen lo solicitado. Compara tus procedimientos y argumentos con tus compañeros.

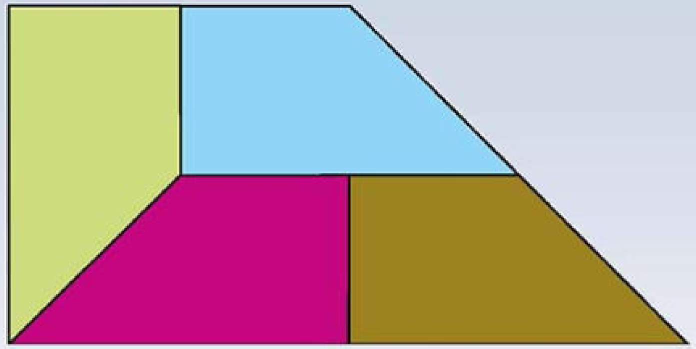


4. En equipos, construyan un hexágono regular semejante al que aparece abajo, pero cuyos lados midan el doble; tomen como referencia el punto F'.



- Comparen los lados homólogos (correspondientes) de ambos polígonos y escriban el factor de proporcionalidad entre ellos.
- ¿Cómo son los ángulos correspondientes entre ambos polígonos?

Supera el reto



¿Consideras que a esta figura se le puede denominar autosemejante?, ¿por qué?
¿Puedes construir alguna otra figura autosemejante? Constrúyela en tu cuaderno.

Explora

Revisa la presentación que está en la siguiente página y consolida tus aprendizajes sobre el tema: http://afamac.uprm.edu/Talleres-Documentos/Congruenciay%20Semejanza.pdf (Consulta: 23 de enero de 2017).

Figuras y cuerpos

Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

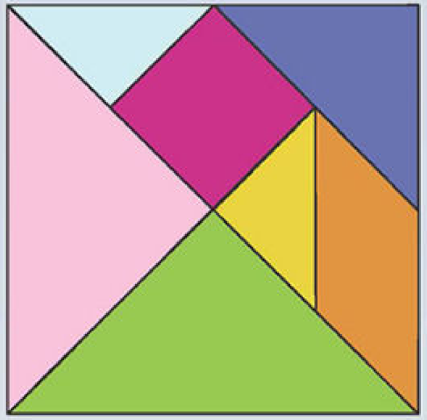
Lección 3. El tangrama

Supera el reto

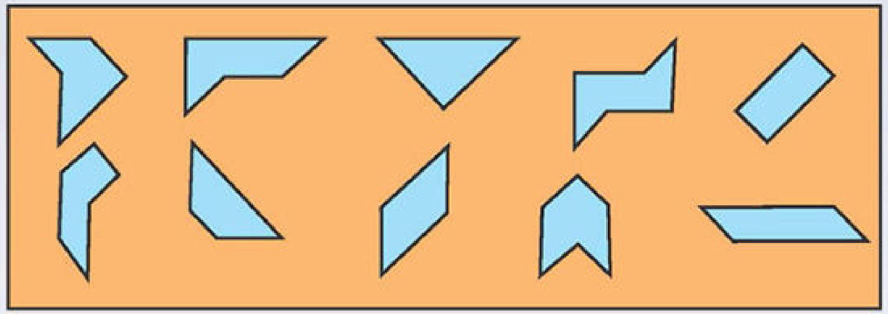
El *Tangrama* es uno de los acertijos más antiguos, conocido en China como *ch´i ch´iao t´n*, que significa: "plan ingenioso de varias piezas".

A diferencia de otros acertijos similares, este pasatiempo oriental ha sobrevivido a través del tiempo debido a que tiene múltiples utilidades en psicología, pedagogía y en la enseñanza de conceptos geométricos.

Calca en una hoja cuatro triángulos congruentes al triángulo amarillo, recórtalos y... **¡a jugar!**

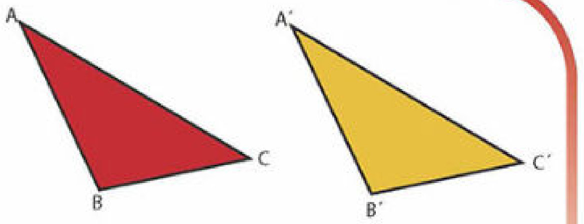


1. Reúnete con un compañero y traten de formar las siguientes figuras. Para cada una utiliza siempre todas las piezas. Gana quien realice en el menor tiempo todas las figuras.



2. Piensa en las respuestas de las siguientes preguntas y discútelas con tu profesor y con tus compañeros.
   - ¿Cómo son los cuatro triángulos entre sí?
   - ¿Consideras que son congruentes?
   - Si son congruentes, ¿por qué piensas que lo son?
   - Ahora pega en tu cuaderno los cuatro triángulos y escribe como título: Triángulos congruentes.

Idea matemática



Recuerda que: "Dos figuras geométricas que tienen la misma forma y el mismo tamaño son congruentes".

Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son congruentes si tienen respectivamente congruentes sus lados homólogos y sus ángulos correspondientes. Es decir, si:

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$ y

$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$ y $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$,

entonces: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

¿Cómo construir triángulos?

Reúnete con un compañero y contesten lo siguiente. Anoten las respuestas en su cuaderno.

1. Dados tres segmentos de cualquier medida, ¿en qué casos será posible construir un triángulo con tres segmentos? ¿Por qué?
2. Para comprobar su afirmación, recorten tiras de papel de 10 cm, 8 cm y 6 cm. ¿Pueden construir un triángulo con ellas? ¿Cómo es la suma de dos de sus lados con respecto al tercero?

   $10 + 8 > 6$ $\quad$ $10 + 6 > 8$ $\quad$ $8 + 6 > 10$

   ¿La suma siempre es mayor?

   Comparen la diferencia:

   $10 - 8 < 6$ $\quad$ $10 - 6 < 8$ $\quad$ $8 - 6 < 10$

   ¿Cómo es la diferencia de dos lados con respecto al tercero?
3. Recorten tiras de 8 cm, 5 cm y 3 cm e intenten construir un triángulo y expliquen lo que sucede. Comparen la suma y la diferencia.

   $8 + 5 > 3$ $\quad$ $8 + 3 > 5$ $\quad$ $5 + 3 = 8$

   $8 - 5 = 3$ $\quad$ $8 - 3 = 5$ $\quad$ $5 - 3 < 8$

   Con las tiras de 8 cm, 5 cm y 3 cm no es posible construir un triángulo, ¿por qué?
4. Recorten tiras de 8 cm, 6 cm y 4 cm y, antes de formar el triángulo, comparen la suma de dos lados con el tercero de ellos.

   $8 + 6 > 4$ $\quad$ $8 + 4 > 6$ $\quad$ $4 + 6 > 8$

   ¿Cómo es la diferencia entre esos dos lados en comparación con el tercero?

   $8 - 6 < 4$ $\quad$ $8 - 4 < 6$ $\quad$ $4 - 6 < 8$

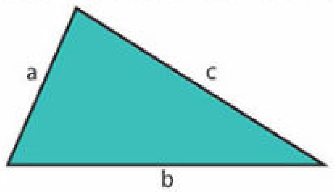
Idea matemática

En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la del tercero y su diferencia es menor:

$a + b > c$ $\quad$ $a - b < c$

$a + c > b$ $\quad$ $a - c < b$

$b + c > a$ $\quad$ $b - c < a$

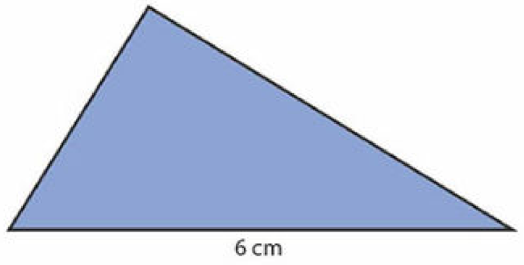


¿Cómo construir triángulos congruentes a uno dado?

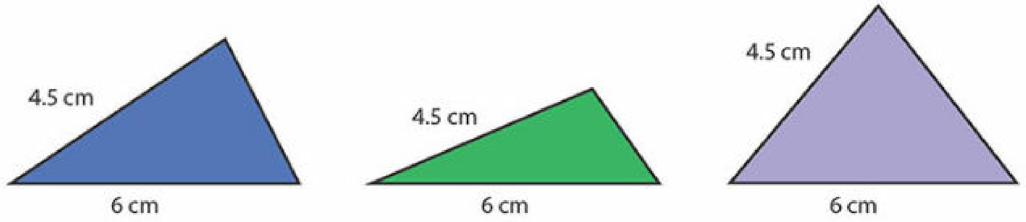
María no pudo asistir a la escuela porque estaba enferma, sus compañeros le han llamado para saber cómo se encuentra y ella ha aprovechado para preguntar qué tarea debe realizar para la clase de matemáticas. Sus compañeros le informaron que debe trazar un triángulo en específico y con ciertas características, pero cada uno le dio diferente información para realizarlo, ¿cuál o cuáles de los siguientes conjuntos de datos le permitirá construir el triángulo solicitado por el profesor?

1. Analiza lo que hizo María para construir el triángulo. Escribe en tu cuaderno las respuestas que se piden.

   a) Trazar un triángulo tal que la longitud de uno de sus lados mida 6 cm.
      - María construyó el triángulo que se muestra a continuación. ¿Podrías construir otros más? Si es así, traza dos.
      - Con sólo la medida de uno de sus lados se pudieron construir varios triángulos, ¿se podrán construir más triángulos? ________ ¿Como cuántos más? ________ ¿Por qué sucede esto?

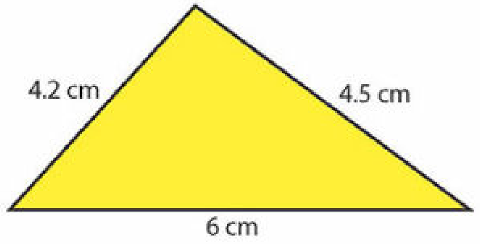
   

   b) Trazar un triángulo tal que dos de sus lados midan 6 cm y 4.5 cm respectivamente. Estos son los triángulos que María dibujó:

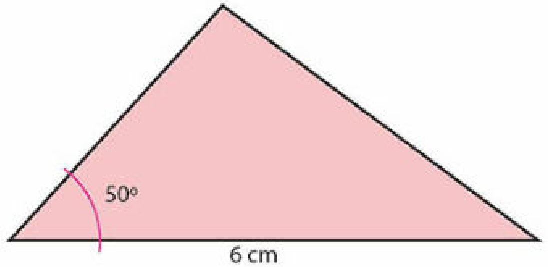
      - Con la medida de dos lados, también pudo construir varios triángulos, sólo fue cambiando la medida del ángulo formado entre esos dos lados. ¿Se podrán construir más triángulos o sólo estos tres? ¿Cuántos más? Traza en tu cuaderno otros triángulos con estas medidas.

   c) Trazar un triángulo tal que las medidas de sus tres lados sean 6 cm, 4.5 cm y 4.2 cm.
      - Con la medida de los tres lados pudo construir el siguiente triángulo.
      - ¿Se podrá construir cuando menos otro triángulo?

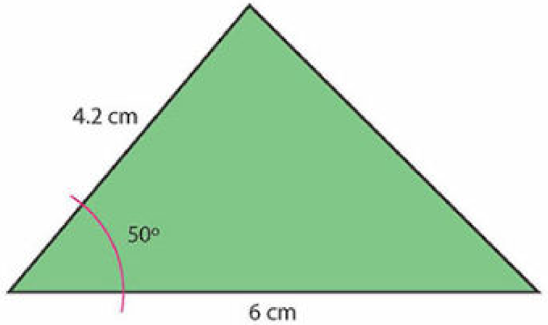
   

Trata de construirlo. ¿Pudiste hacerlo? Justifica tu respuesta.
Intenta construir otros en tu cuaderno con estas medidas. Recórtalos y compáralos.

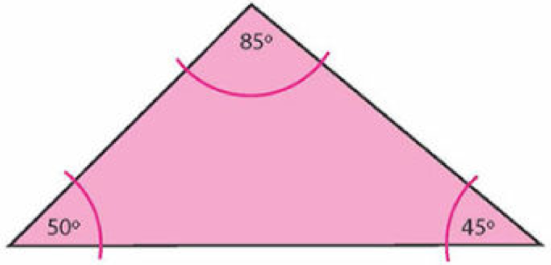
d) Trazar un triángulo con un ángulo de 50° y uno de sus lados de longitud 6 cm.
- María pudo construir el siguiente triángulo. ¿Crees que puedan construirse más triángulos diferentes con estas medidas? Si es así, trázalos en tu cuaderno.
- Con la medida de un lado y un ángulo pudo construir también varios triángulos, sólo fue cambiando el largo del otro lado del ángulo dado. ¿Se podrán construir más triángulos con esas dos medidas? ¿Cuántos más?



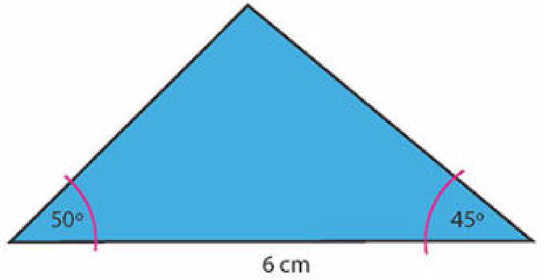
e) Un ángulo mide 50° y los lados que lo forman 6 cm y 4.2 cm.
- Con estos tres datos también pudo construir sólo un triángulo. ¿Será posible construir otro más con esta información?



f) Sus ángulos miden 50°, 45° y 85°.
- María trazó el siguiente, ¿crees que se puedan trazar más triángulos con estas medidas? Si es así, trázalos en tu cuaderno.
- Con la medida de los tres ángulos también pudo construir varios triángulos, todos de diferentes tamaños, ¿se podrán construir más triángulos diferentes? Traza otros en tu cuaderno. ¿Cuántos crees que sea posible trazar? ¿Por qué crees que sucede esto?

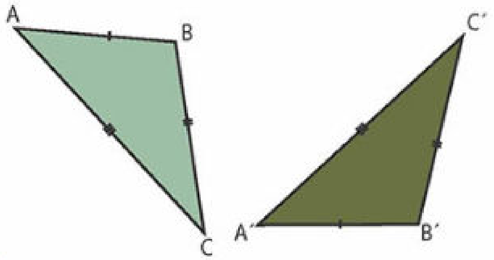


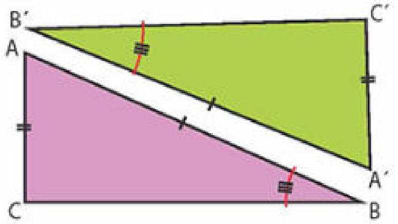
g) Un lado mide 6 cm y sus ángulos adyacentes 50° y 45°.
Con la medida de un lado y los ángulos adyacentes pudo construir el siguiente triángulo, ¿será posible construir otro? Intenta trazar otro con las mismas medidas. ¿Lograste hacerlo? ¿Por qué crees que sucede esto?



Como puedes ver, de los siete conjuntos de datos que le dieron a María sus compañeros, sólo tres de ellos le permitieron construir el triángulo solicitado por el profesor. ¿Cuáles fueron? ¿Cuántos datos tenían esos conjuntos de datos para obtener el triángulo deseado?

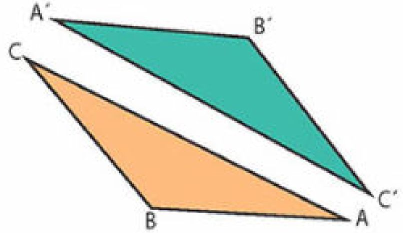
De acuerdo con las tres maneras de construir triángulos mostradas en las páginas anteriores, completa el siguiente razonamiento a partir de la congruencia entre sus lados y sus ángulos. Escribe en tu cuaderno la información que hace falta.
- Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ y $\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$, entonces: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Dicho en otras palabras: dos triángulos son congruentes, si ____________________





- Si se cumple que en un triángulo, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$ y $\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$, entonces: ____________________ es decir, dos triángulos son congruentes si ____________________

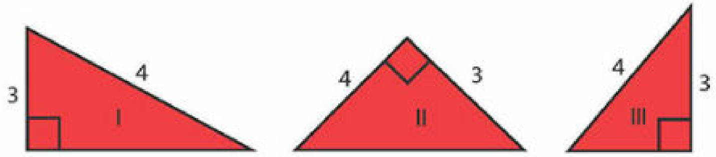
- Por último, si tenemos que: $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$, entonces: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Es decir, para saber si dos triángulos son congruentes, basta con comparar sus ____________________



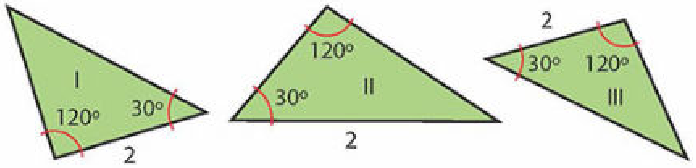
Gracias a estas conclusiones podemos establecer de manera sencilla cuándo tenemos __________
Comparen sus razonamientos y lleguen a conclusiones con ayuda de su profesor.

2. Resuelve los siguientes problemas. Realiza los procedimientos en tu cuaderno.
Toma en cuenta los datos que aparecen en los siguientes triángulos e identifica cuáles son congruentes y el criterio de congruencia correspondiente. Justifica tu respuesta.

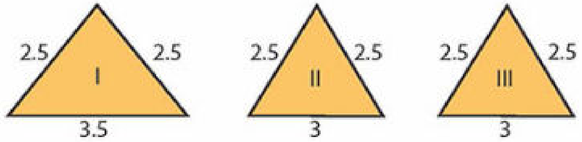
a) Son congruentes los triángulos ______ y ______ por el criterio ____________________



b) Son congruentes los triángulos ______ y ______ por el criterio ____________________



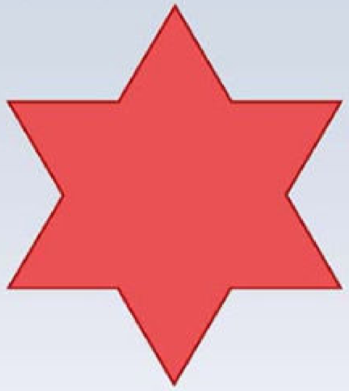
c) Son congruentes los triángulos ______ y ______ por el criterio ____________________



d) Interpreta los siguientes mensajes para construir triángulos. A partir de la información que se da, escribe LLL, LAL o ALA según corresponda.
- Traza un triángulo que mida 5 cm en uno de sus lados y los ángulos que están en sus extremos sean de 60° y 50° respectivamente.
- Traza un triángulo que tenga un ángulo de 75° y cuyos lados que lo forman sean de longitud igual a 8 cm y 6 cm respectivamente.
- Traza un triángulo cuyos lados midan 5 cm, 6 cm y 7 cm.
- ¿Se dificultó el trazo de alguno de los triángulos? ¿Por qué?
- ¿Cuál de los criterios de congruencia consideras más sencillo de aplicar?
- ¿Será posible utilizar los criterios de congruencia en otras figuras para demostrar o comprobar sus propiedades?
- Explica en qué otras asignaturas tienes necesidad de construir triángulos congruentes o qué otros usos se les puede dar.
- En grupo revisen y discutan sus respuestas con ayuda del profesor.

Supera el reto

Copia en tu cuaderno la estrella de abajo. Traza en su interior las líneas necesarias para obtener sólo triángulos equiláteros congruentes.



- ¿Cómo sabes que las líneas que trazaste determinan triángulos equiláteros congruentes?
- ¿Qué criterio de congruencia utilizarías para demostrar que los triángulos son congruentes?

Explora

Consolida tus conocimientos, para ello revisa los ejemplos resueltos sobre semejanza de triángulos que se encuentran en la siguiente dirección electrónica: http://www.preunab.cl/wp-content/uploads/2015/03/webinar16.pdf (Consulta: 23 de enero de 2017).

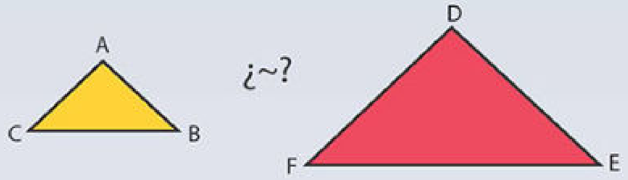
Figuras y cuerpos

Lección 4. La competencia

Supera el reto

El profesor Roberto formó en su grupo cinco equipos y organizó una competencia cuyo premio eran cinco pases dobles para el cine.
Los equipos debían trazar triángulos a partir de la información que se les entregó en una tarjeta. Después, cada equipo debía argumentar por qué los triángulos eran o no semejantes.
Todos los equipos afirmaron que los triángulos construidos eran semejantes. ¿Es posible que todos los equipos hayan construido triángulos semejantes?
Ayuda al profesor a decidir cuál de los cinco equipos debe recibir los pases dobles para el cine.
Para construir sus triángulos, los equipos tenían las indicaciones que se muestran a continuación. Cada equipo argumentó lo siguiente:

Equipo 1:
- Construyan dos triángulos:
- En el triángulo ABC, dos lados miden 2 cm y el tercero 3 cm.
- En el triángulo DEF, un lado mide 4 cm y otro 6 cm.

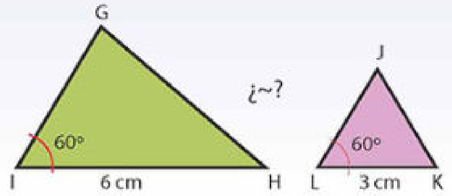


El equipo afirmó que los $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes porque al comparar la medida entre sus lados, la razón de semejanza era la misma.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

¿Crees que el equipo 1 tiene un buen argumento para afirmar que los triángulos son semejantes? ¿Por qué?

Equipo 2:
- Construyan dos triángulos:
- En el triángulo GHI, uno de sus lados mide 6 cm y uno de sus ángulos 60°.
- En el triángulo JKL, un lado mide 3 cm y el ángulo 60°.



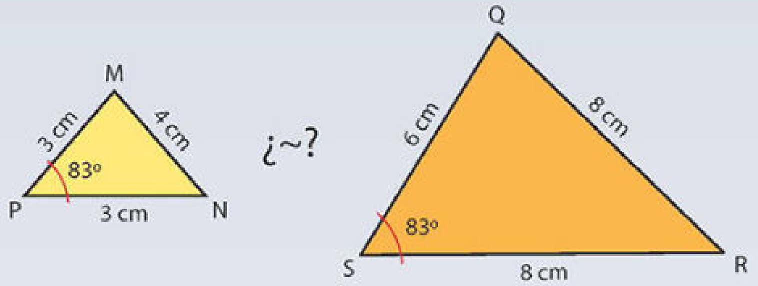
El equipo aseguró que eran semejantes porque al comparar la medida de los lados HI y LK, encontraron que el doble de la longitud del lado LK era igual a la longitud del lado HI, además de que tenían un ángulo congruente.

$$\frac{\overline{HI}}{\overline{LK}} = \frac{6}{3} = 2 \qquad \text{ángulo I} \cong \text{ángulo L}$$

Observa los triángulos construidos por el equipo 2. Reproduce el $\triangle$JKL y compara la medida de los otros ángulos; mide los lados JK y LJ, compara los lados GH e IG respectivamente para determinar si se cumple que la razón de semejanza sea la misma. ¿Cómo son $\triangle$GHI y $\triangle$JKL? ____________

Equipo 3:
Construyan dos triángulos:

- En el triángulo MNP, dos lados miden 3 cm y el tercero 4 cm; el ángulo comprendido entre los primeros mide 83°.
- En el triángulo QRS, un lado mide 6 cm y otro 8 cm; el ángulo correspondiente se conserva.



El equipo 3 afirmó que $\triangle$MNP y $\triangle$QRS son semejantes porque al comparar las medidas de dos de sus lados correspondientes la razón de semejanza era la misma.

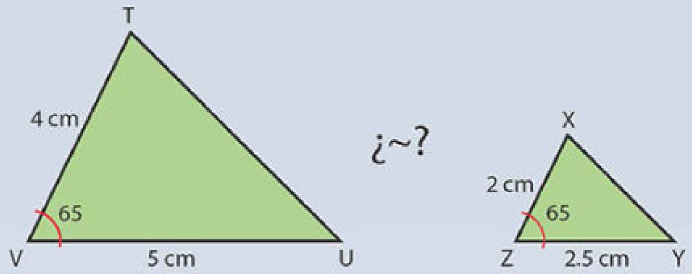
$$\frac{\overline{MN}}{\overline{QR}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\overline{PM}}{\overline{SQ}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Observa los triángulos construidos por el equipo 3. Reproduce $\triangle$MNP y sobrepón cada ángulo con su correspondiente para saber si son iguales. Obtén la razón de los lados MN y QR. No olvides que dos triángulos son semejantes si tienen ángulos correspondientes congruentes y lados proporcionales respectivamente.

- ¿Estás de acuerdo con la respuesta del equipo 3?
- ¿Cómo son $\triangle$MNP y $\triangle$QRS?

Equipo 4:
Construyan dos triángulos:

- En el triángulo TUV, dos lados miden 5 cm y 4 cm respectivamente y el ángulo comprendido entre ellos mide 65°.
- En el triángulo XYZ, dos lados miden 2.5 cm y 2 cm respectivamente y el ángulo correspondiente mide 65°.



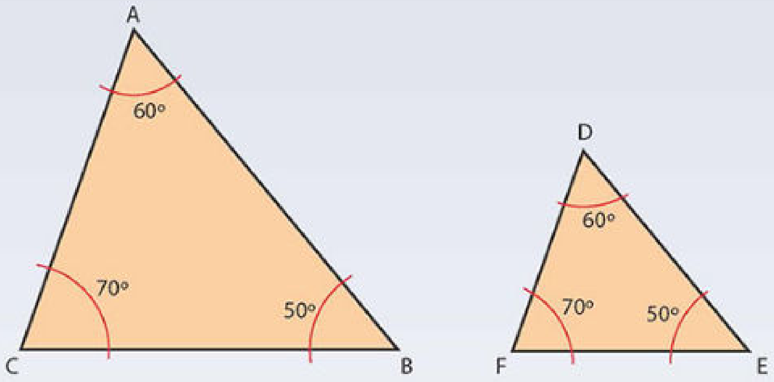
El equipo 4 aseguró que los $\triangle$TUV y $\triangle$XYZ son semejantes porque al comparar la medida de los lados UV y VT con los lados YZ y ZX, encontraron que la razón de semejanza era la misma, además de que el ángulo V era congruente al ángulo Z.

$$\frac{\overline{UV}}{\overline{YZ}} = \frac{5}{2.5} = 2 \qquad \frac{\overline{VT}}{\overline{ZX}} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \boxed{\text{ángulo V} \cong \text{ángulo Z}}$$

Reproduce el $\triangle$XYZ y sobrepón los ángulos X y Y con T y U respectivamente, mide los lados TU y XY y obtén la razón. ¿Cómo son $\triangle$TUV y $\triangle$XYZ?

Equipo 5:
Construyan dos triángulos:

- El triángulo ABC y el triángulo DEF, donde los tres ángulos de cada uno midan 50°, 60° y 70° y sus lados sean proporcionales.



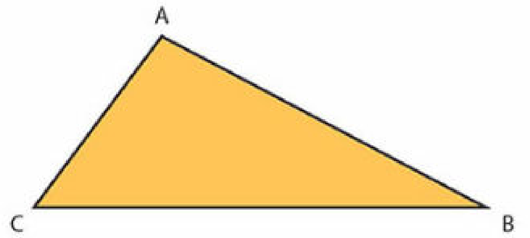
El equipo 5, afirmó que los $\triangle$ ABC y $\triangle$ DEF son semejantes porque tienen respectivamente congruentes sus tres ángulos.
Mide los lados de cada uno de los dos triángulos y obtén la razón de los lados correspondientes.

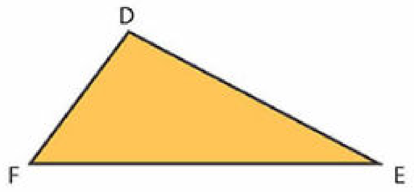
- ¿Cómo son $\triangle$ ABC y $\triangle$ DEF?
- Cuando se quiere determinar si dos triángulos son semejantes, ¿cuáles son los datos mínimos que necesitamos saber para afirmar este hecho?
- ¿Qué equipo recibió los pases dobles para el cine?

Criterios de semejanza de triángulos

Reúnete con un compañero, analicen la información y completen los siguientes razonamientos:

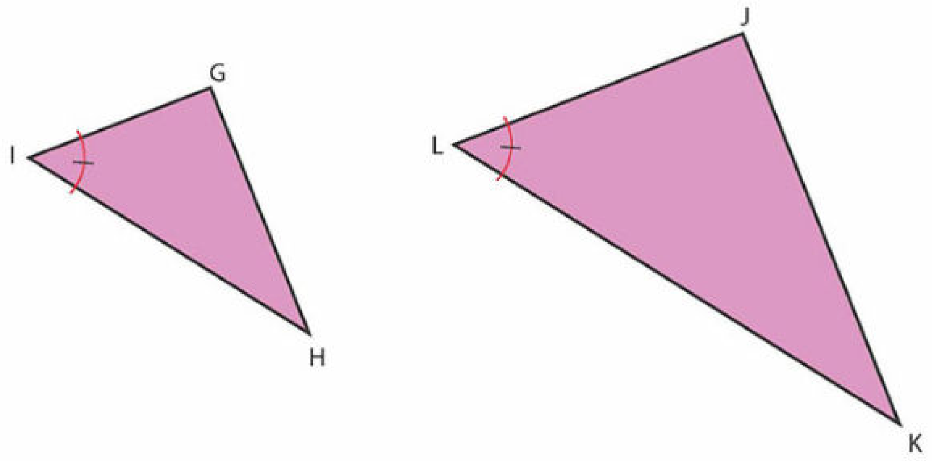
Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$





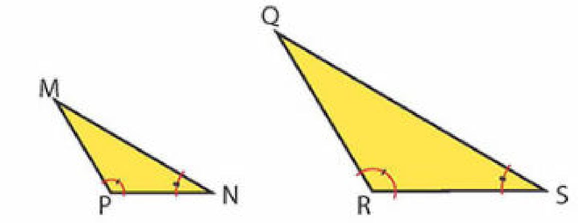
- ¿Cuándo son semejantes dos triángulos?

Si $\frac{\overline{HI}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{IG}}{\overline{LJ}}$ y $\measuredangle I \cong \measuredangle L$ entonces $\triangle GHI \sim \triangle JKL$



- ¿Cuándo son semejantes dos triángulos?

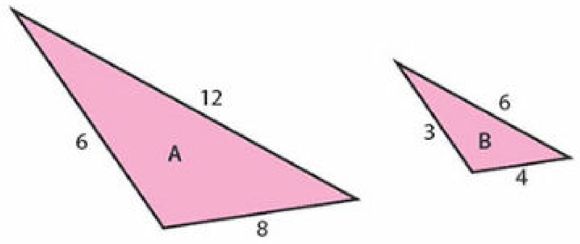
Si $\measuredangle N \cong \measuredangle S$ y $\measuredangle P \cong \measuredangle R$ entonces $\triangle MNP \sim \triangle QRS$



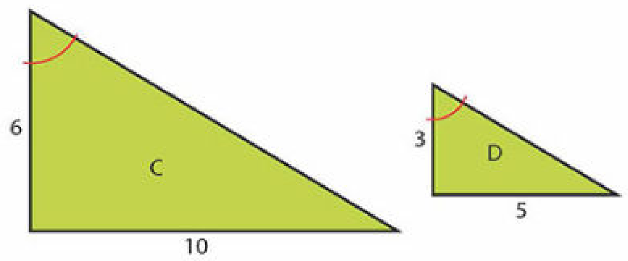
- Por lo tanto, los triángulos son semejantes si __________

Comparen sus razonamientos y establezcan conclusiones con la ayuda de su profesor.

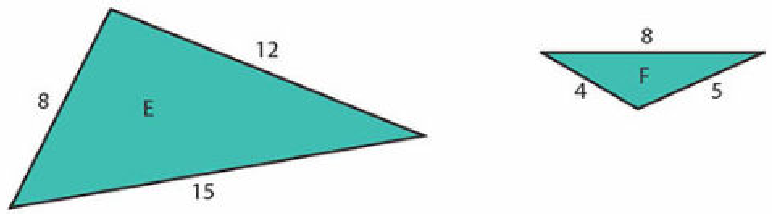
1. De manera individual, señala si las siguientes parejas de triángulos son semejantes. En caso afirmativo, anota el criterio de semejanza que lo justifique.



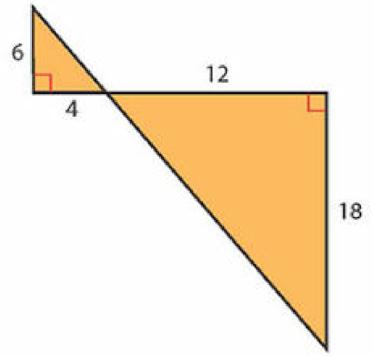
a) Los triángulos _____ y _____ son ________ por el criterio ________



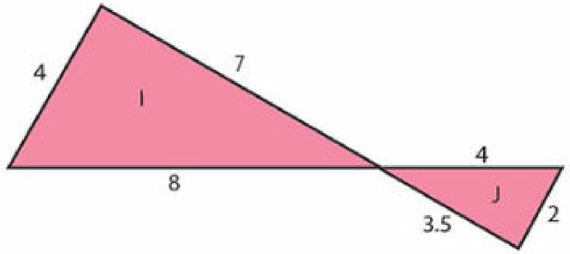
b) Los triángulos _____ y _____ son ________ por el criterio ________



c) Los triángulos _____ y _____ son ________ por el criterio ________

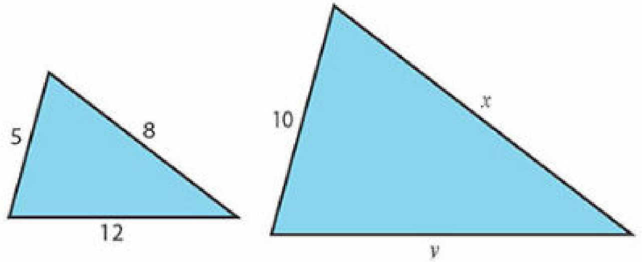


d) Los triángulos ______ y ______ son __________ por el criterio ____________

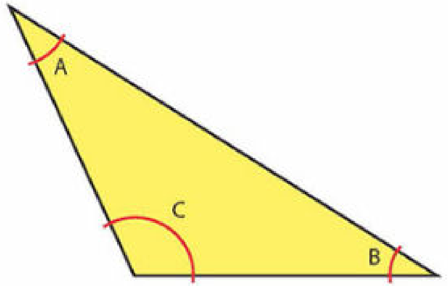


e) Los triángulos ______ y ______ son __________ por el criterio ____________

2. La siguiente pareja de triángulos es semejante, escribe la proporción adecuada y encuentra los valores de x y y.



3. Utiliza regla y compás (o transportador) para trazar en tu cuaderno un triángulo semejante al siguiente. Después comparte tu procedimiento con tus compañeros.

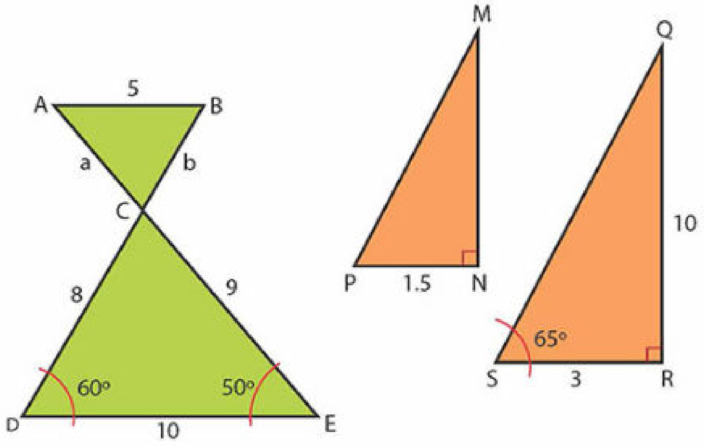


a) Aplica un procedimiento diferente para construir un par de triángulos semejantes.

4. En los siguientes enunciados indica si se da o no la semejanza de triángulos. Justifica tu respuesta.

a) Cuando tienen dos lados proporcionales.
b) Cuando tienen sus tres lados proporcionales.
c) Cuando tienen dos ángulos congruentes.
d) Cuando tienen un ángulo congruente.
e) Cuando tienen dos lados proporcionales y congruente el ángulo incluido.
f) Dos triángulos rectángulos cuyo ángulo agudo es congruente.
g) Los triángulos equiláteros.
h) Los triángulos isósceles.

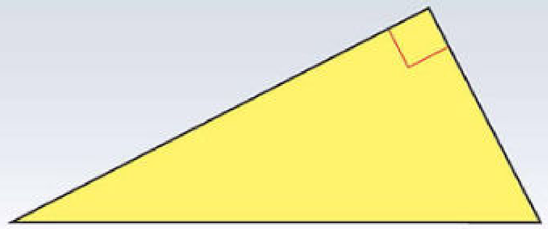
5. De las siguientes parejas de triángulos semejantes, encuentra los valores que se piden.



Primer pareja de triángulos	Segunda pareja de triángulos
$\measuredangle A =$ __________	$\measuredangle M =$ __________
$\measuredangle B =$ __________	$\measuredangle P =$ __________
$\measuredangle C =$ __________	$\measuredangle Q =$ __________
$\overline{BC} =$ __________	$\overline{MN} =$ __________
$\overline{AC} =$ __________	$\overline{RS} =$ __________

Supera el reto

¿Es posible trazar una recta al siguiente triángulo rectángulo para obtener dos triángulos semejantes al primero? ¿Cuál criterio de semejanza justificaría tu respuesta?



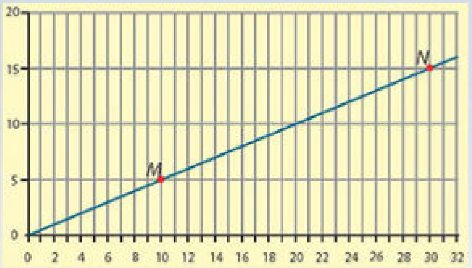
Proporcionalidad y funciones

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad

Lección 5. Las gráficas I

Supera el reto

En equipo, observen la gráfica y contesten en su cuaderno las preguntas que se plantean.



1. ¿Cuál es la ordenada del punto M?
2. Si Manuel se encuentra ubicado en el punto M y el valor de la abscisa es 10, ¿cuál es el valor de la ordenada?
3. Si Nadia se encuentra en el punto N, ¿cuál es el valor de la abscisa?, ¿cuál el de la ordenada?
4. Identifiquen el valor de la ordenada y abscisa del punto intermedio entre Manuel y Nadia.

Resuelvan en equipo las siguientes situaciónes.

1. Considerando que la gráfica anterior representa el desplazamiento de un ciclista a una velocidad constante, las abscisas (coordenadas x) representan el tiempo en minutos y las ordenadas (coordenadas y) la distancia recorrida en km.
   a) ¿Cuál será la distancia recorrida por el ciclista cuando han transcurrido 10 minutos?
   b) ¿Qué distancia habrá recorrido el ciclista al cabo de 20 minutos?
   c) ¿A qué distancia del punto de origen se encuentra el ciclista después de 30 minutos?
   d) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido pasados 40 minutos?
   e) ¿Cómo podrían obtener el tiempo que el ciclista tardará en recorrer 60 km? ¿Y al recorrer 100 km? ¿Cuántos km recorre en un minuto?
   f) Completen la siguiente tabla con base en sus respuestas.

Tiempo (min)	1	10	20	30	40	50	60
Distancia (km)		5			20		

Comenten con sus compañeros de grupo la estrategia que siguieron para contestar las preguntas.

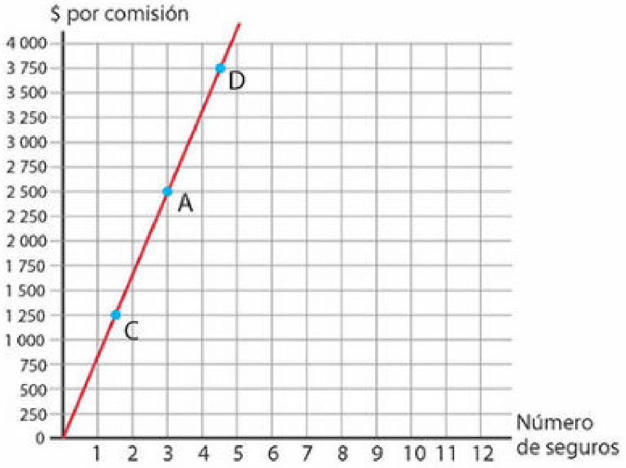
2. En grupo, analicen la gráfica y la tabla. Respondan las preguntas y argumenten sus respuestas.
   a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que corresponde a la relación de estas magnitudes?
   b) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a esta relación?
   c) ¿Podrían hallar la distancia a la que se encontrará el ciclista después de transcurrido un determinado tiempo?
   d) ¿Podrían conocer el tiempo que ha transcurrido cuando el ciclista ha recorrido cierta distancia?
   e) Si la distancia recorrida por el ciclista aumenta, ¿el tiempo de su recorrido aumenta o disminuye?
   f) Si la distancia que recorre es menor, ¿qué pasa con el tiempo?

Idea matemática

El tipo de relación entre dos magnitudes que se ha estudiado en esta lección recibe el nombre de *variación directamente proporcional*. Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar una, aumenta la otra en la misma medida o razón.

3. En equipos, lean y resuelvan en su cuaderno las siguientes cuestiones.
   a) El papá de Luis compra 5 boletos para entrar a una feria y le cobran $10 ¿Cuántos boletos puede adquirir con $20?
   b) Luis tiene 5 años de edad y su hermano tiene 10, ¿qué edad tendrán en 5 años más?
   c) Considerando la gráfica del inicio de la lección, ¿cuál de las situaciones anteriores puede asociarse con dicha gráfica?
   d) ¿Cuál de esas dos situaciones presenta una variación directamente proporcional? Argumenten sus respuestas con el resto del grupo.

4. Una empresa de seguros paga a sus vendedores una comisión por cada seguro que venden. La siguiente gráfica muestra las comisiones que ganaron tres vendedores en una semana de trabajo. Observa la gráfica y contesta de manera individual.



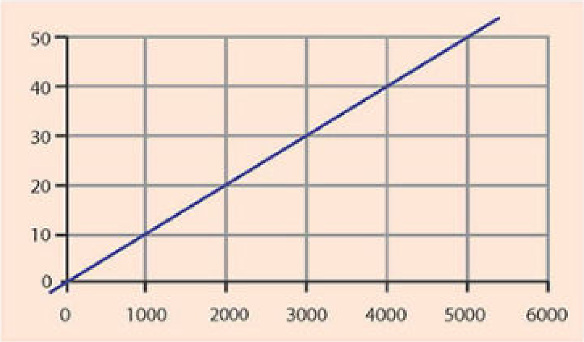
   a) ¿Cuánto ganó en esa semana el vendedor A?, ¿cuántos seguros vendió?
   b) ¿Cuánto ganó el vendedor B y cuánto el vendedor C?, ¿cuántos seguros vendió cada uno?
   c) ¿Cuánto se gana de comisión por cada seguro que se vende?
   d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esta gráfica?
   e) ¿Qué hiciste para encontrar la constante de proporcionalidad?
   f) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta relación?
   g) ¿Cómo puedes saber cuánto gana un trabajador que vendió 45 seguros?

5. ¿Cuál de las siguientes situaciones puede asociarse con la representación de la gráfica?
   a) A los 5 años de edad, Omar pesaba 20 kg, ¿cuánto pesará a los 25 años? ¿Cuánto habrá pesado al año de nacido?
   b) La maestra Elena encontró que en una papelería vendían 5 lápices por $20. Si compra 25 lápices, ¿cuánto tendrá que pagar?, ¿cuánto le costó cada lápiz?

Verifica tus resultados con el resto del grupo y validen sus procedimientos.

6. ¿Cuál de las siguientes situaciones puede asociarse con esta representación gráfica?

   a) En un banco me indicaron que por cada $1 000 de ahorro me darían un vale de $10. ¿Cuánto dinero debía ahorrar si quería obtener un vale de $50?
   b) En una tienda departamental me ofrecieron la siguiente promoción: por adquirir la tarjeta de socio me dan un bono de $10 y por cada $1 000 de compra que realice ese mismo día me otorgarán otro bono de $10 pesos. ¿Cuánto necesito comprar para recibir un total en bonos de $50?



   c) Para preparar un perfume se necesitan 10 gramos de esencia floral por cada 100 ml de alcohol. ¿Cuántos gramos de esencia se requerirán si se utilizan 5 000 ml de alcohol?
   d) Observa la gráfica anterior y contesta.
      - ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
      - ¿Qué expresión algebraica representa esta variación?

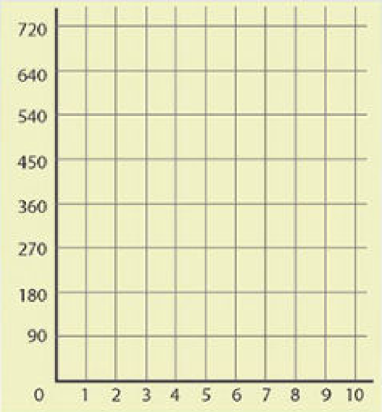
Supera el reto

En pareja, lean las indicaciones y preguntas que se plantean a continuación.
El que termine primero dice "¡Basta!" y el otro deja de escribir.
Comparen sus procedimientos y respuestas. Quien haya tenido más aciertos gana este sencillo juego.

Indicaciones:

1. Lean y resuelvan: Tomás quiere visitar a unos familiares que viven a 540 km de distancia de donde él habita; para ello, maneja a una velocidad constante de 90 km por hora.

   a) Traza el recorrido después de una hora y hasta llegar a su destino.
   b) ¿En cuántas horas habrá recorrido la mitad del camino?
   c) ¿Cuánto tiempo manejará antes de llegar con su familia?



Para concluir, revisa toda la lección y contesta.
¿Cuáles son las características de la gráfica que resulta de representar una variación proporcional directa?
Verifica la respuesta con tus compañeros de grupo.

Proporcionalidad y funciones

Lección 6. Las tablas

Supera el reto

En equipo, resuelvan las siguientes situaciones.

1. Ricardo maneja un autobús foráneo y esta mañana hizo un recorrido por carretera con una velocidad constante que se registra en la siguiente tabla. En su cuaderno, copien y contesten las preguntas.

Tiempo (horas)	2	3	4	5	6
Distancia (km)	220	330	440	550	660

   a) ¿Qué distancia recorrió Ricardo en 2 horas?
   b) ¿A qué velocidad constante manejó?
   c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
   d) De las siguientes expresiones, ¿cuál representa esta relación de magnitudes?

      A) $d = 110\,t^2$ B) $d = 110\,t$ C) $d = 110$

   e) Si a las 3.5 horas hizo una parada, ¿qué distancia llevaba recorrida?

Comprueben y validen sus respuestas con sus compañeros de grupo.

2. Se sabe que el largo de un terreno rectangular mide el doble de su ancho.

   a) ¿Qué expresión algebraica representa esta relación?
   b) Si el ancho aumenta en 2 unidades, ¿cuántas aumentará su largo?
   c) Si el ancho aumenta en 3 unidades, ¿cuántas unidades aumentará su largo?
   d) Si el ancho aumenta 5 unidades, ¿cuánto aumentará su largo?
   e) Si el ancho mide 5.5 unidades, ¿cuánto medirá su largo?

3. A partir de las longitudes del ancho que se les proporcionan y de las condiciones anteriores, completen la siguiente tabla:

	Terreno A	Terreno B	Terreno C	Terreno D
Ancho (unidades)	2	3	5	5.5
Largo (unidades)				

Comenten con el resto del grupo el procedimiento que utilizaron para hallar las respuestas.

Idea matemática

A través de una tabla también es posible identificar la variación directamente proporcional entre dos variables. Por ejemplo:

x	5	10	15	20	30
y	10	20	30	40	60

Tabla de variación directamente proporcional. Las cantidades aumentan o disminuyen proporcionalmente. Resulta sencillo hallar la constante proporcional y la expresión algebraica que la representa.

x	5	10	15	20	30
y	7	19	25	37	60

Tabla de variación no proporcional. Las cantidades pueden aumentar o disminuir, pero no proporcionalmente. No existe constante de proporcionalidad.

x	8	16	32	64	128
y	80	40	20	10	5

Tabla de variación inversamente proporcional. Las cantidades varían proporcionalmente pero de manera inversa, es decir, al aumentar una, la otra disminuye en forma proporcional.

1. Realiza los siguientes ejercicios:
   a) De forma individual copia las siguientes tablas en tu cuaderno.
   b) Indica cuál o cuáles corresponden a una variación directamente proporcional.
   c) Obtén la constante de proporcionalidad de aquellas que son variación directamente proporcional.
   d) Escribe la expresión algebraica que corresponde a aquellas tablas de variación directamente proporcional.

- Tabla de costo de boletos de un cine.

Número de boletos	2	4	6	8	10
Costo ($)	120	240	360	480	600

- Tabla de medidas de la orilla de unos manteles cuadrados.

Medida del lado (cm)	25	30	35	40	45
Perímetro (cm)	100	120	140	160	180

- Tabla del tiempo que tardaría un grupo de albañiles en levantar una barda.

Número de albañiles	2	4	8	16
Tiempo (días)	8	4	2	1

2. Copia las siguientes gráficas en tu cuaderno e indica cuál corresponde a una variación proporcional directa.

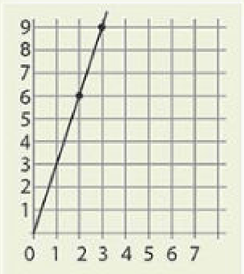


figura 1

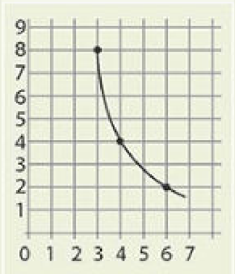


figura 2

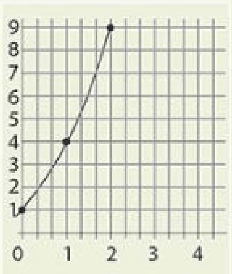


figura 3

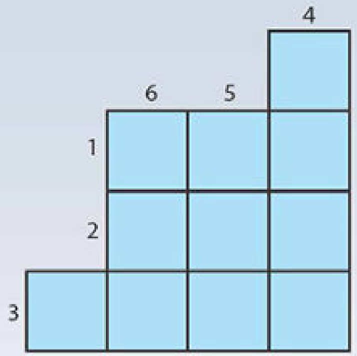
3. De las siguientes expresiones, indica cuál o cuáles representa(n) una variación directamente proporcional y cópiala en tu cuaderno.

$y = 2x + 3$ $\qquad$ $y = 5x$ $\qquad$ $y = 3x - 1$

En grupo y con apoyo de tu profesor, revisen las respuestas y procedimientos utilizados, aclaren dudas en caso de haberlas. Comenten cuál procedimiento les pareció mejor para resolver este tipo de problemas y por qué.

Supera el reto

En parejas, resuelvan el siguiente crucigrama.



Horizontales:
1. Si por 3 playeras se paga $456, ¿cuánto se debe pagar por 5 del mismo tipo y calidad?
2. Una máquina produce 1 000 tortillas cada 5 minutos, ¿cuántas se obtienen por minuto?
3. Por un terreno que mide 120 m² se paga un impuesto de $950, ¿cuánto se debe pagar por un terreno, en las mismas condiciones, que mide 230 m²?

Verticales:
4. En una fábrica se producen 200 focos en 3 minutos, ¿cuántos se elaborarán en una hora?
5. Si $y = 3010$, ¿cuál es el valor de x en la expresión $y = 5x$?
6. Sabiendo que $k = 7$ y $x = 104$, encuentra el valor de y en la expresión $y = kx$.

Explora

Desarrolla tus habilidades en el tema de esta lección.
Entra a la página https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf (Consulta: 31 de octubre de 2013).
Analiza y resuelve el reactivo 11.
En grupo, verifica tus respuestas.

Proporcionalidad y funciones

Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

Lección 7. Las carpetas

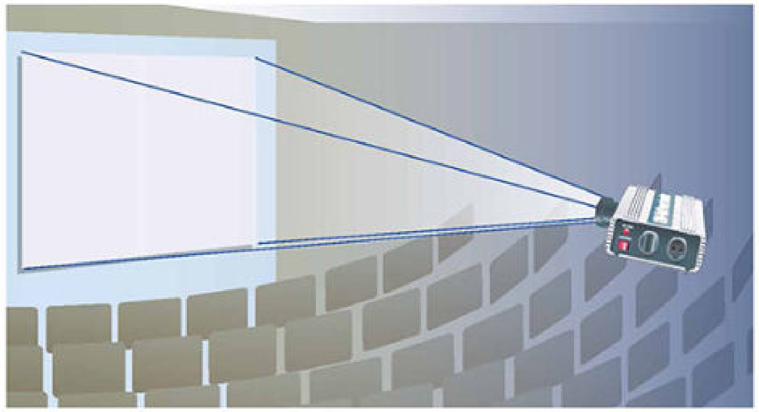
Supera el reto

En equipo, resuelvan el siguiente problema.
En una tienda venden carpetas de forma cuadrada de diferentes tamaños y colores. Las medidas se presentan en la siguiente tabla.

x Medida de lado en cm	10	15	20	30	40	50
y Superficie en cm²	100	225	400	900	1600	2500

1. Analicen los datos e indiquen qué relación hay entre la medida del lado 10 cm y la superficie de 100 cm². ¿Y entre 15 y 225?
2. Indiquen cuál es la expresión algebraica que representa esta relación.
3. Partiendo de la tabla anterior, en donde y (*superficie*) depende del valor de x (*medida del lado*), ¿cuál de las siguientes expresiones es la que representa esta relación? ¿Por qué?
   a) $y = 2x$ b) $y = x^2$ c) $y = 2x^2$
4. Comenten con el resto del grupo qué hicieron para conocer las respuestas.

En equipos, resuelvan el siguiente problema.
La proyección de una imagen depende de la distancia entre el proyector y la pantalla. Si la sala de proyección cuenta con una mega-pantalla, ¿se requerirá una distancia muy grande o pequeña?



A continuación se muestra una tabla con las distancias entre el proyector y la pantalla, así como el área que se requiere en pantalla para proyectar la imagen.

Distancia (m)	1	2	3	4	5
Área (m²)	2	8	18	32	50

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta relación?
   A) $y = x^2$ B) $y = 2x^2$ C) $y = (x + 1)^2$
b) Comprueben que la expresión escogida aplica para todos los valores que puede tomar la distancia (1, 2, 3, 4, 5), representada por x.
c) ¿Con la misma expresión se puede calcular la medida que alcanza la superficie de la pantalla a una distancia de 8 m? ¿Por qué?
d) ¿Cuál es la superficie requerida para una distancia de 8 m?
e) Si se cuenta con un área de 60 m² para proyectar la imagen, ¿a qué distancia debe colocarse el proyector?
f) Elijan las expresiones que representan variaciones cuadráticas.
   $y = x + 2$, $y = x^2 + 3$, $y = 5x^2/2$, $y = 5x^3 - 1$
   ¿Por qué consideran que se les llama así?

Idea matemática

Las relaciones de variación cuadrática contienen una de sus variables elevada al cuadrado.
Las variaciones cuadráticas han permitido deducir diversas fórmulas para hacer cálculos en física, matemáticas, biología, economía, etcétera.
Por ejemplo, en física, la fórmula para conocer la distancia que recorre un cuerpo en caída libre es una variación cuadrática:

$d = \frac{gt^2}{2}$ donde: d es la distancia
g es la constante de gravedad
t es el tiempo

En este caso, como se conoce el valor de la gravedad, la constante es 9.81 m/s², por lo que la expresión que corresponde es: $d = 4.9t^2$

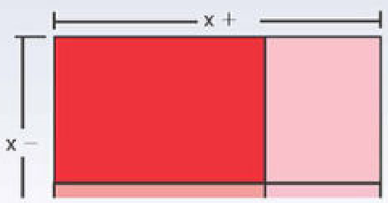
Comenten con el resto del grupo los procedimientos que utilizaron para encontrar las respuestas.

Supera el reto

De manera individual, resuelve lo siguiente.
a) Se deja caer un objeto desde una altura determinada y tarda 20 segundos en llegar al piso. ¿Cuál es la altura desde la que cae?
   Copia la tabla en tu cuaderno, complétala y encierra el resultado.

Tiempo en segundos	0	5	10	15	20
Distancia en metros	0	122.5			

b) A un cuadrado se le aumentaron 10 cm de un lado y se le disminuyeron 5 cm del otro, formando un rectángulo. ¿Cuál de las siguientes expresiones permitirá calcular la medida de la superficie del rectángulo?



$y = 10x - 5y$

$y = (x - 10)(x + 5)$

$y = (x + 10)(x - 5)$

c) En un laboratorio se observó la reproducción de una bacteria durante 6 horas y se registró en una tabla:

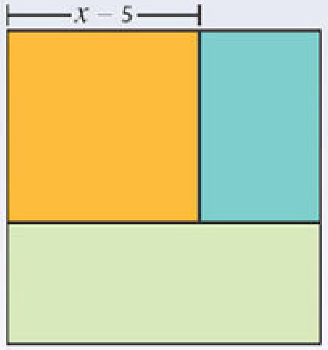
Horas	1	2	3	4	5	6
Número de bacterias	6	24	54	96	150	216

¿Cuál de las siguientes expresiones representa la reproducción de estas bacterias?

d) Se pretende cortar una lámina de madera con una superficie determinada, de tal manera que su largo mida 5 cm más que el doble de su ancho. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta variación? Completa la siguiente tabla para determinar la superficie de la lámina:

Ancho (cm)	5	6	7	8	9	10
Largo (cm)						
Superficie (cm^2)				168		

e) El arquitecto Eduardo cuenta con un terreno cuadrangular para hacer una casa habitación. El terreno tiene cierta medida por lado, la cual se pretende disminuir en 5 m, como se muestra en la figura, para establecer el lugar de jardín y estacionamiento. ¿Cuál es la expresión que permite calcular la medida de la superficie del terreno destinada para la construcción de la casa habitación?



f) Si el largo de una cartulina mide 8.5 cm más que su ancho, ¿cuál es la expresión que permite obtener el área de la cartulina?

En grupo, revisen sus resultados y procedimientos.

Nociones de Probabilidad

Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

Lección 8. La escala de la probabilidad

Supera el reto

En equipos, indiquen cuántos resultados puede haber si se realiza el experimento de lanzar tres monedas al mismo tiempo. Elaboren en su cuaderno un diagrama de árbol o un arreglo rectangular para visualizar y describir los posibles resultados.
Supervisados por su profesor, comenten con sus compañeros de grupo la forma que eligió cada equipo para representar gráficamente el experimento.
Pase al pizarrón un equipo que haya utilizado el diagrama de árbol y escriban los resultados obtenidos; asegúrense de haberlo hecho correctamente.
Pidan a otro equipo que haya hecho su representación a través de un arreglo rectangular que, en el pizarrón, anoten los resultados obtenidos.
¿Obtuvieron los mismos resultados ambos equipos? ¿Cuántos resultados obtuvieron? ¿El número de resultados corresponde al del espacio muestral?

1. Reunidos en equipos lean y contesten lo que se pide.
El espacio muestral del experimento de lanzar 3 monedas al mismo tiempo es:
E = {(AAA), (AAS), (ASA), (ASS), (SAA), (SAS), (SSA), (SSS)}
Basándose en los resultados anteriores, respondan las siguientes preguntas en sus cuadernos.
   a) ¿Cuántos resultados contienen 3 águilas?
   b) ¿Cuántos resultados conforman al espacio muestral?
   c) ¿Cuál es la probabilidad del evento "obtener tres águilas"?

Idea matemática

El espacio muestral (E) asociado a un experimento aleatorio, es el conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento.
Ejemplo: Al lanzar un dado, el espacio muestral es: E= {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Se llama evento o suceso a todo subconjunto de un espacio muestral. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, es posible definir los siguientes eventos:
– "Obtener un número menor a 4"
– "Obtener un número impar"
– "Obtener un número mayor o igual a 5"

Completen la siguiente tabla de acuerdo con el experimento anterior.

Probabilidad del evento	Fracción	Decimal	Porcentaje
"Obtener 2 águilas"			37.5%
"Obtener 1 águila"	$\frac{3}{8}$		
"Obtener 0 águilas"		0.125	
"Obtener 3 soles"			
"Obtener 2 soles"			

2. Comenten con sus compañeros y su profesor los resultados anteriores y expliquen cómo obtuvieron las probabilidades de dichos eventos. Contesten las siguientes preguntas.

   De los eventos anteriores:

   - ¿Cuál tiene mayor probabilidad? ¿Por qué?
   - ¿Cuál tiene menor probabilidad? ¿Por qué?
   - ¿Qué valores puede tomar la probabilidad de un evento? Justifiquen sus respuestas.

Idea matemática

- La probabilidad de un evento A se representa por $P(A)$.
- La probabilidad es una medida en la escala 0 a 1.
- Al evento o suceso imposible le corresponde el valor 0.
- Al evento o suceso seguro le corresponde el valor 1.
- La probabilidad de un evento se puede representar como:

$$P(A) = \frac{n}{m} \text{ con n = número de resultados favorables}$$
$$\text{m = número total de resultados posibles}$$

- La probabilidad también se puede representar como un decimal o un porcentaje.

3. En parejas, copien y completen la tabla que resulta de lanzar un dado.

Probabilidad del evento	Fracción	Decimal	Porcentaje
Obtener un número par			
Obtener un número menor o igual a 6			
Obtener un número menor a 2			
Obtener un número mayor a 6			
Obtener un número impar			

   a) ¿Cuál de los eventos anteriores tiene la probabilidad más pequeña pero mayor a cero? ¿Por qué?

   b) ¿Cuál de los eventos anteriores tiene mayor probabilidad de ocurrir? ¿Qué probabilidad tiene este evento? ¿Cómo se les llama a este tipo de eventos?

   c) ¿Cuál de los eventos anteriores tiene menor probabilidad de ocurrir? ¿Qué probabilidad tiene este evento? ¿Cómo se les nombra a los eventos que tienen esa probabilidad? ¿Por qué?

Comenten con sus compañeros y con su profesor los resultados anteriores y expongan una razón por la que es importante conocer la probabilidad de un evento.

4. Obtengan la probabilidad de los siguientes eventos en forma de fracción.

   a) Evento A: "voltear una carta de la baraja española y que salga un rey". La baraja española tiene 40 cartas con cuatro reyes. P (A) = ________

   b) Evento B: "de una bolsa con 10 canicas verdes, 5 rojas, 3 blancas y 2 negras, meter la mano y sacar una canica roja". P (B) = ________

   c) Evento C: "comprar 4 boletos de una rifa de 100 números y sacarse el premio". P (C) = ________

   d) Evento D: "de una caja que tiene 12 papelitos azules, 8 rojos y 10 amarillos, meter la mano y sacar uno amarillo". P (D) = ________

   e) Evento F: "lanzar un dado y que salga un 8". P (F) = ________

5. Se vendieron 100 boletos para la rifa de un televisor en la escuela. La siguiente tabla muestra los boletos que compró cada grupo. ¿Qué grupo tiene mayor probabilidad de ganársela?

Grupo	Boletos comprados
1° A	10
1° B	2
2° A	5
2° B	25
3° A	18
3° B	40
Total	100

   a) En una recta del 0 al 1, ubica la probabilidad de cada grupo. ¿Cuál tiene mayor probabilidad de ganar?

6. Muestren su trabajo ante el grupo y discutan lo siguiente:

   a) ¿Dónde ubicaron las probabilidades sus compañeros?

   b) ¿Cómo eligieron cada lugar?, ¿qué grupo tiene menor posibilidad de ganar?

   c) El grupo con menor probabilidad de ganar, ¿se encuentra más cerca del cero o del uno?, ¿por qué creen que sucede esto?

Comenten lo que aprendieron en la lección y la forma en que lo hicieron. Anótenlo en su cuaderno.

Nociones de Probabilidad

Lección 9. Eventos complementarios, excluyentes e independientes

Supera el reto

Organizados en equipos, observen los siguientes eventos según el experimento y respondan lo que se solicita:

a) Experimento: Lanzar un dado
E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Evento A: "Cae un número primo menor a 3" A = {2}
Evento B: "Cae un número igual o mayor a 3" B = {3, 4, 5, 6}
¿Hay algún número que se repita en los eventos A y B?
¿Podrían ocurrir al mismo tiempo los dos eventos? ¿Por qué?
¿Cuál es la intersección de estos eventos A y B, o sea, A∩B?
¿Algún integrante del equipo sabe cómo se llaman este tipo de eventos?

b) Experimento: Lanzar un dado
E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Evento C: "Cae un número menor a 3" C = {1,2}
Evento D: "Cae un número mayor o igual a 3" D = {3, 4, 5, 6}
¿Hay algún número que se repita en los eventos C y D?
¿Si unimos los dos eventos C y D (C∪D) qué obtenemos cómo resultado?

Idea matemática

Dos eventos son mutuamente excluyentes (A∪B) si no pueden ocurrir en forma simultánea, esto es, si su intersección es vacía (A∩B = ∅). La probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes es: P(A∪B) = P(A) + P(B) Los eventos complementarios son aquellos en los que su unión representa el espacio muestral (C∪D = E). Se dice que son complementarios porque el complemento de C es D y el complemento de D es C. El segundo caso de *Supera el reto* es un ejemplo de este tipo de eventos.

1. Reunidos en equipos de 5 integrantes, comenten las semejanzas que encuentren entre los eventos mutuamente excluyentes y los complementarios. Indiquen la diferencia entre ellos.
2. Corten 5 papelitos y escriban en cada uno un número del 1 al 5; dóblenlos y métanlos en una bolsa. El número que se saque en la primera extracción se regresará a la bolsa y volverá a participar, mientras que el número que se saque en la segunda extracción será el ganador y dará las conclusiones del equipo.
   a) Antes de la primera extracción, ¿cuál es la probabilidad de que uno de los números que se encuentran en la bolsa sea el elegido?, ¿por qué?
   b) En la segunda extracción, ¿cuál es la probabilidad de que uno de los números que se encuentra en la bolsa sea el elegido si se volvió a meter el papelito de la primera extracción?, ¿por qué?
   c) ¿Cómo varía la probabilidad de ocurrencia entre los eventos probables de la primera extracción y la segunda?, ¿por qué?

Idea matemática

Cuando la ocurrencia de un evento no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro, se llaman eventos independientes y su probabilidad es el producto de las probabilidades de cada suceso: P(A)×P(B).

3. Realicen el mismo experimento pero sin regresar el número de la primera extracción.
   a) Antes de la primera extracción, ¿cuál es la probabilidad de que uno de los números que se encuentran en la bolsa sea el elegido?, ¿por qué?
   b) En la segunda extracción, ¿cuál es la probabilidad de que uno de los números que se encuentra en la bolsa sea el premiado si no se volvió a meter el número de la primera extracción?, ¿por qué?
   c) ¿Cómo varía la probabilidad de ocurrencia entre los eventos probables de la primera extracción y la segunda?, ¿por qué?

Idea matemática

Cuando la ocurrencia de un evento sí afecta la probabilidad de ocurrencia del otro, se llaman eventos dependientes.

4. Indiquen a qué tipo de eventos corresponden los siguientes planteamientos y por qué. Respondan en su cuaderno lo que se pide.
   a) Experimento: Lanzar un dado
      - Evento A = {1, 2, 3}
      - Evento B = {4, 5, 6}
      - E=
      - A∪B =
      - A∩B =
      - ¿Qué tipo de eventos son?, ¿por qué?

   b) Experimento: Lanzar una moneda
      - Evento A: "Que caiga sol"
      - Evento B: "Que caiga águila"
      - E =
      - A∪B =
      - A∩B =
      - ¿Qué tipo de eventos son?, ¿por qué?

   c) Experimento: Sacar un número de una urna con 20 pelotas numeradas del 1 al 20.
      - Evento A: "Que el número que salga sea menor o igual a 10"
      - Evento B: "Que el número que salga sea mayor a 10"
      - E =
      - A∪B =
      - A∩B =
      - ¿Qué tipo de eventos son?, ¿por qué?

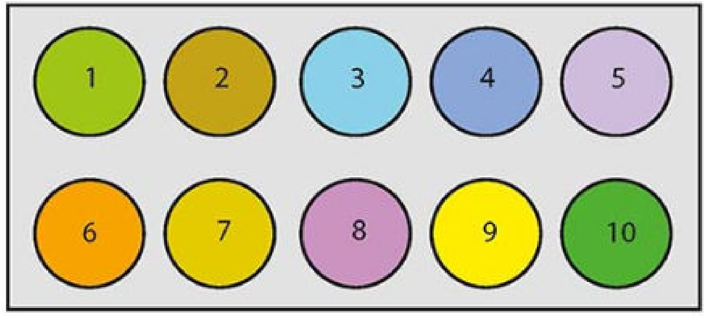
   d) Experimento: Extraer una canica de una urna que tiene 3 rojas, 2 blancas y 1 negra, ver su color y regresarla.
      - Evento C: "Que sea roja"
      - Evento D: "Que sea blanca"
      - ¿Qué tipo de eventos son?, ¿por qué?

   e) Experimento: "Sacar un número de una urna con 20 pelotas numeradas del 1 al 20, ver qué número sale y regresarlo".
      - Evento C: "Que el número que salga sea 2"
      - Evento D: "Que el número que salga sea 5"

      ¿Qué tipo de eventos son?, ¿por qué?

Comenten con sus compañeros de grupo sus resultados. Mencionen las características de cada uno de estos eventos.

5. Reunidos en equipos determinen, de la siguiente lista, las parejas de eventos mutuamente excluyentes y las parejas de eventos complementarios.
En una urna hay 10 canicas numeradas del 1 al 10.



- Evento A: “Que la bola tenga un número menor que 6”
- Evento B: “Que la bola tenga un número mayor a 8”
- Evento C: “Que la bola tenga un número par”
- Evento D: “Que la bola tenga un número mayor o igual a 6”
- Evento R: “Que la bola tenga un número menor o igual a 8”
- Evento T: “Que la bola tenga un número impar”

6. Anoten en su cuaderno lo que se pide:
   - ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
   - ¿Qué parejas de eventos son mutuamente excluyentes? ¿Por qué?
   - ¿Cuál es la intersección de esos eventos?
   - ¿Cuál es la unión de esos eventos?
   - ¿Qué parejas de eventos son complementarios? ¿Por qué?
   - ¿Cuál es la intersección de esos eventos?
   - ¿Cuál es la unión de esos eventos?

7. Basándose en el experimento anterior anoten en una hoja dos parejas de eventos complementarios y dos de eventos mutuamente excluyentes inventados por ustedes. Escriban el espacio muestral del experimento y las parejas de eventos que hayan pensado, así como su unión e intersección.

Supervisados por su profesor, compartan con sus compañeros sus resultados para ver si todos los equipos lo hicieron bien. Comenten si los resultados obtenidos son los mismos y busquen una explicación si hay alguna diferencia.

Comenten lo que aprendieron en la lección y cómo lo aprendieron. Anótenlo en su cuaderno.

Explora

Accede al sitio: http://www.amschool.edu.sv/paes/e6.htm y fortalece algunos conceptos básicos de probabilidad. Resuelve los ejercicios sobre eventos complementarios, excluyentes e independientes que se proponen. (Consulta: 23 de enero de 2017).

Análisis y representación de datos

Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población de estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación

Lección 10. Las gráficas II

¿Sabías que la población mundial se calcula en 7 000 000 000 de personas aproximadamente?

Imagina que deseamos conocer el postre favorito de los estudiantes de secundaria de todo el mundo, suena casi imposible, sin embargo, hay empresas dedicadas a hacer investigaciones de este tipo. ¿Cómo crees que lo hagan?

Uno de los estudios para conocer preferencias, elecciones, etcétera. son las **encuestas**. Como la **población** de estudiantes de secundaria en el planeta es muy amplia, se pueden tomar poblaciones de menor tamaño. Tu escuela puede ser una población, tu salón también puede ser una población, pero de menor tamaño.

Registra en tu cuaderno cuál es el postre favorito de diez de tus compañeros.

Palabra pi

encuesta. Entrevistas, cuestionarios, consultas que se realizan con el fin de recopilar datos; pueden aplicarse para hacer inferencias que permitan generalizaciones o conclusiones.
población. Es el conjunto sobre el cual se quiere realizar una serie de pruebas o simplemente una encuesta.
muestra. Es cualquier subconjunto de la población, pero debe cuidarse que sea lo suficientemente representativa de la población entera, ya que es de donde se obtendrá información.

Con base en esta información, completa el siguiente esquema indicando cuál es la población y cuál es la **muestra**.

Cuando queremos determinar cuál es el postre favorito de los estudiantes de secundaria existen dos poblaciones posibles; para no perdernos en lo que deseamos investigar, debemos pensar en el experimento y veremos que la población que nos interesa son los estudiantes y no los postres.

Anota en tu cuaderno tres posibles poblaciones de estudiantes de secundaria y tres muestras. Ejemplo:

P = Los estudiantes de secundaria de Nuevo León.
M = Los estudiantes de 2° año de la escuela secundaria “San Nicolás de los Garza”.

¿Cómo se eligen las muestras? Hay tres opciones:

- **Voluntario**, esto es, invitar a quien desee llenar la encuesta.
- **Convencional**, es decir, que encuestes a quien tú quieras o prefieras.
- **Al azar**, mediante una tabla de números aleatorios, o sea, se numera cada uno de los elementos de la población, como la matrícula de los alumnos, y se eligen al azar según el tamaño de la muestra.

1. En parejas, escriban en la siguiente tabla ventajas y desventajas de las tres opciones para elegir una muestra.

	Ventajas	Desventajas
Método 1		
Método 2		
Método 3		

Palabra pi

gráfica. Palabra que viene del griego *graphos* y significa esquema. Sirve para representar una serie de datos organizados que se obtienen de una investigación.

Después de obtener los datos de una muestra es necesario organizarlos de acuerdo con las características que nos interesan para su análisis e interpretación. ¿Qué hacer una vez que elegiste cómo tomar la muestra?

Idea matemática

Los datos de una muestra pueden describirse de 3 maneras: Tabular, Gráfica y Aritmética.
La descripción tabular se hace mediante la construcción de tablas. La descripción gráfica requiere la elaboración de **gráficas** y en la aritmética es necesario operar con los datos de la muestra para obtener medidas de tendencia central (media aritmética, moda, mediana).

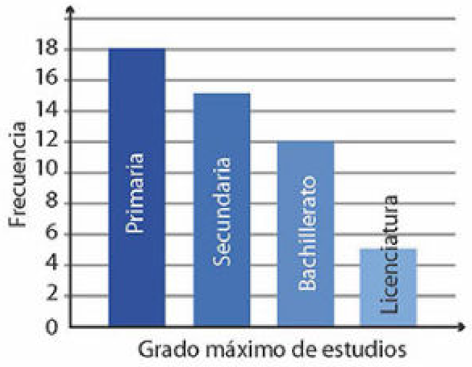
2. En grupo contesten los cuestionamientos que se indican.
Al preguntar a algunos alumnos su calificación en matemáticas se obtuvieron los siguientes datos: 9, 9.5, 8, 7, 7, 8, 8.5, 10, 7, 7, 7, 7, 7, 6.
   a) Calculen el valor de la media aritmética ($\bar{x}$).
   b) Indiquen cuál es el valor de la mediana (Me) y la moda (Mo)
   c) ¿Qué procedimiento utilizaron para determinar estos valores?

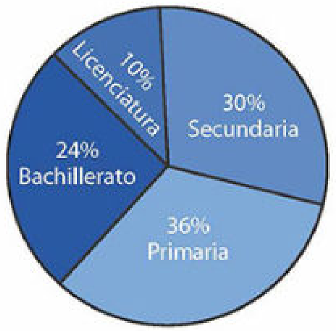
$\bar{x}$ =	Me =	Mo =

   d) Describan los datos de forma tabular, gráfica o aritmética.
   e) ¿Qué dificultades encontraste?
   f) Comenten los resultados con sus compañeros y aporten alguna información al significado de los datos.
   g) Comenten con sus compañeros a qué se refiere cada una. ¿Qué tipo de gráficas conocen?

Idea matemática

Gráfica de barras. Suele utilizarse para datos cualitativos, los cuales se disponen en el eje horizontal y las frecuencias de los datos en el eje vertical. Entre las barras, paralelas entre sí y con el mismo ancho, existe la misma distancia.



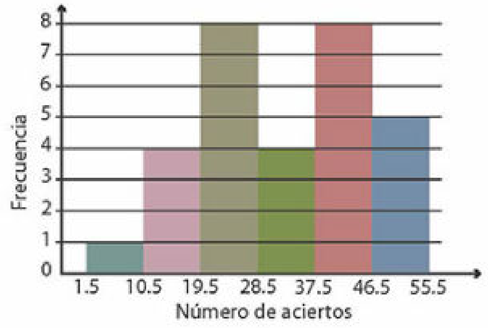


Gráfica circular o de pastel. Es un diagrama en forma de círculo, en cuyos sectores se reflejan los porcentajes de los datos recopilados. Estos porcentajes se obtienen al realizar la proporción de cada una de las frecuencias de los datos con el total de ellos y trazar los ángulos (θ) que les corresponden. Los valores en la gráfica circular se acomodan de mayor a menor en el sentido de las manecillas del reloj a partir de la marca del 12. Por ejemplo, si un valor tiene un porcentaje de 30% para saber el ángulo del sector que ocupa dicho porcentaje realizamos la operación:

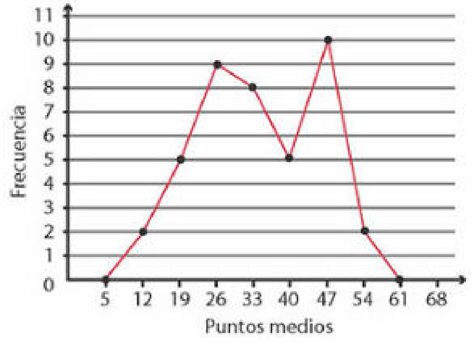
$$\theta = \frac{30(360)}{100}$$

Por lo tanto, lo que debe medir el ángulo que ocupa el sector circular de dicho porcentaje es $\theta = 108°$.

Histogramas. Diagramas de barras rectangulares contiguas que comúnmente se utilizan para datos agrupados por intervalos, representados por los límites reales distribuidos en el eje horizontal. Los datos de las frecuencias de dichos intervalos son distribuidos en el eje vertical.
Los límites reales son aquellos en los que cae cada intervalo.



Histograma que muestra los límites de los intervalos.



Poligonales. Son gráficas que se construyen uniendo con segmentos de recta los puntos medios de un histograma. Las frecuencias se marcan en el eje vertical y los puntos medios de los intervalos en el horizontal.

Tabla de datos

Año	Número de casas construidas
1993	2 000
1994	3 500
1995	4 000
Total	9 500

Pictograma o gráfica de figuras. Es la presentación de una serie de datos estadísticos por medio de dibujos o símbolos que por su forma ilustran la naturaleza de los datos que se están graficando. La magnitud de los datos representados en los pictogramas es una aproximación burda y no sirve para análisis con fines estadísticos.

3. Realiza una encuesta sobre el postre preferido de tus compañeros. Contesta lo que se pide a partir de tus resultados.
   a) ¿Qué información obtuviste al realizar la encuesta?
   b) ¿Qué información te podría faltar?
   c) ¿Cuál de los tres métodos para elegir una muestra seleccionaste para trabajar?
   d) Representa tus datos de forma tabular.

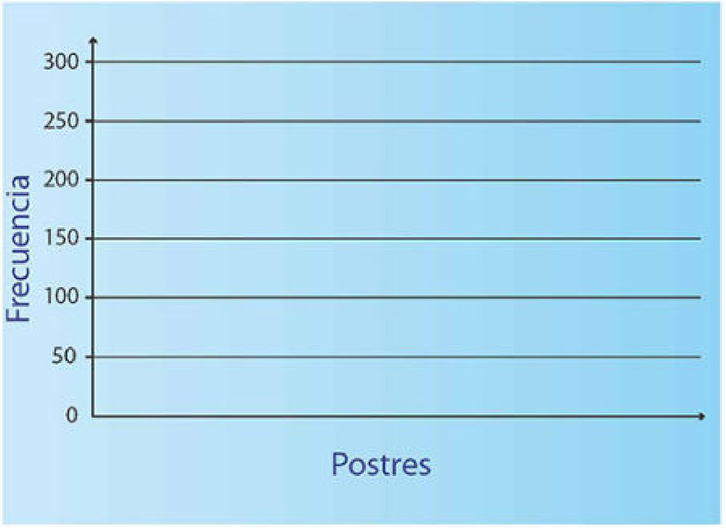
4. Se entrevistó a algunos estudiantes de secundaria y se elaboró la siguiente tabla. Con base en la información, encuentra la muestra y responde las preguntas en tu cuaderno.

Población 2 000 alumnos

Postre	Frecuencia
Fresas con crema	300
Helado	225
Chocolate	150
Gelatina	100
Flan	275
Total	

   a) ¿De cuántos alumnos fue la muestra?
   b) ¿Qué relación hay entre la suma de las frecuencias y la muestra?
   c) ¿Cuál fue el postre que tuvo mayor preferencia?
   d) Recuerda que al dato que tiene mayor frecuencia se le conoce como moda. ¿Cuál es la moda?
   e) ¿Se podría dar el caso en que existan dos modas?

5. Construye la gráfica de barras correspondiente a la tabla anterior y asígnale un título.



6. Con la guía de tu profesor, dibuja en tu cuaderno una gráfica circular con los datos anteriores.
   Tanto en la tabla como en la gráfica se tienen datos con los que se puede calcular la moda, media aritmética y mediana.

Idea matemática

La *media aritmética* para datos no agrupados se calcula con la fórmula $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$ donde Σx es la suma de las frecuencias y N el número de datos, en este caso las opciones de postres.
La *mediana* es el valor de posición central en un conjunto de datos: debajo de él se encuentra el 50 por ciento del total de datos y arriba de él, el otro 50 por ciento. Si los datos están ordenados por magnitud, entonces la mediana es el valor central si el conjunto tiene un número impar de datos. Si el conjunto tiene un número par de datos ordenados por su magnitud, entonces la mediana es la media aritmética de los valores centrales.

7. Con base en esta información, calcula y verifica con tus compañeros los resultados:
   a) Media aritmética =
   b) Mediana =

8. Elabora en tu cuaderno una tabla con los meses del año en los que cumplen años tus compañeros. La muestra debe tener un tamaño de 20 a 30 personas.

9. Construye 2 tipos de gráficas y obtén la moda, la media aritmética y la mediana.

10. Elabora 2 conclusiones con la información que obtengas.

11. ¿Por qué crees que es importante la representación de datos en Estadística?

Supera el reto

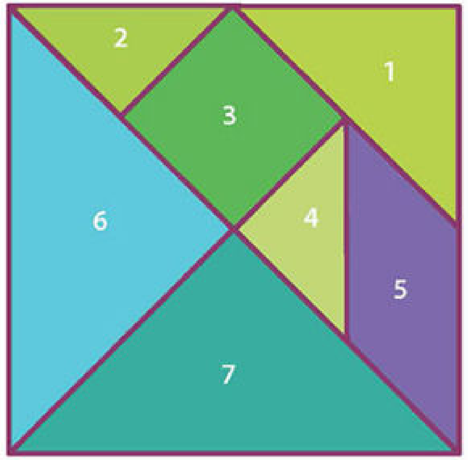
En una escuela se toma una muestra de 50 alumnos, de los cuales 3 leen diariamente el periódico. ¿Cuántos alumnos podemos calcular que leen el periódico si la escuela tiene una población de 400 alumnos?

¿Qué porcentaje de alumnos es probable que lea diariamente el periódico?

Lo que aprendí

Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta cuando corresponda.

1. Observa el siguiente rompecabezas llamado *Tangram*:



Selecciona la opción que señala las piezas que son iguales. Justifica tu respuesta.
a) 1 y 6
b) 2 y 7
c) 1 y 4
d) 6 y 7

2. Analiza las siguientes fotografías y responde lo que se pregunta:

- ¿Cómo son las figuras representadas en las fotografías? ____________
- ¿Qué diferencias encuentras en las figuras? ____________
- ¿Son congruentes las figuras? __________ ¿Por qué? __________

3. Determina cuál de los dos experimentos que se presentan a continuación muestra un ejemplo de eventos complementarios:

a) En el experimento lanzar un dado
   - E (A): Obtener un número impar
   - E (B): Obtener un número par

b) En el experimento lanzar un dado
   - E (A): Obtener un número menor que 5
   - E (B): Obtener un número par

4. A continuación se presentan las calificaciones de matemáticas de un grupo de secundaria.

8	9	10	6	9	8	9	10
6	8	5	9	6	6	5	7
8	7	9	8	5	9	7	8

a) Completa la tabla con las frecuencias de cada calificación.

b) Realiza la gráfica de barras correspondiente.

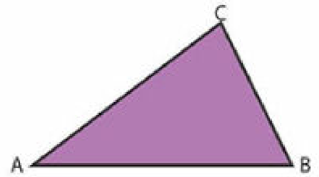
Calificación	Frecuencia

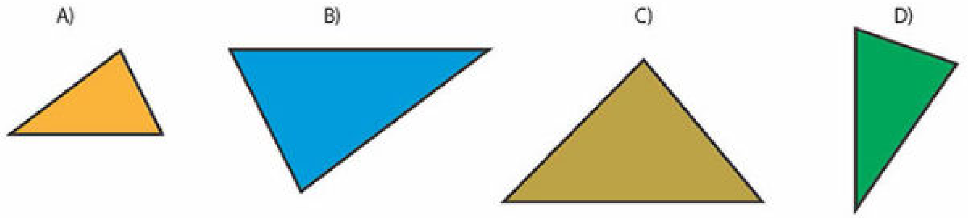
5. Determina el valor de la moda, la media aritmética y la mediana del ejercicio anterior.

Mi prueba PISA

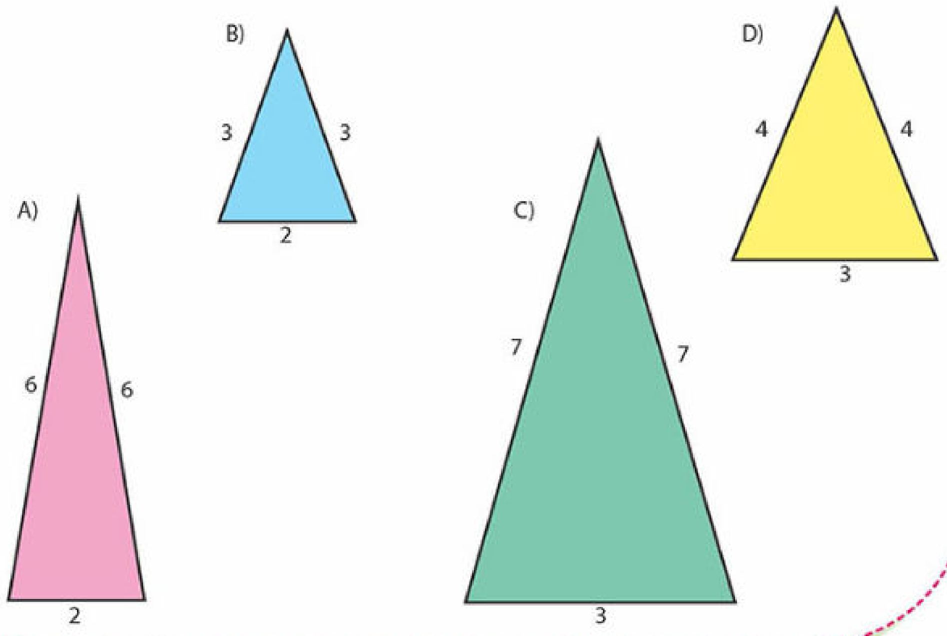
Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta cuando corresponda.

1. ¿Cuál de los triángulos que aparecen abajo es congruente con el triángulo ABC?

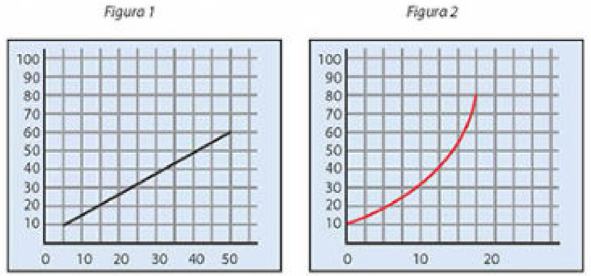




2. ¿Cuál de los siguientes triángulos es semejante a un triángulo isósceles con dos lados de longitud igual a 12 unidades y el otro de longitud 8 unidades?



3. Observa las gráficas y contesta.



¿Cuál de las gráficas representa una variación proporcional?
A) Figura 1 B) Figura 2 C) Las dos figuras D) Ninguna de las dos

4. De acuerdo con los datos de la tabla:

x	20	25	30	35	40
y	60	75	90	105	120

¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
A) 3 B) 5 C) 12 D) 15

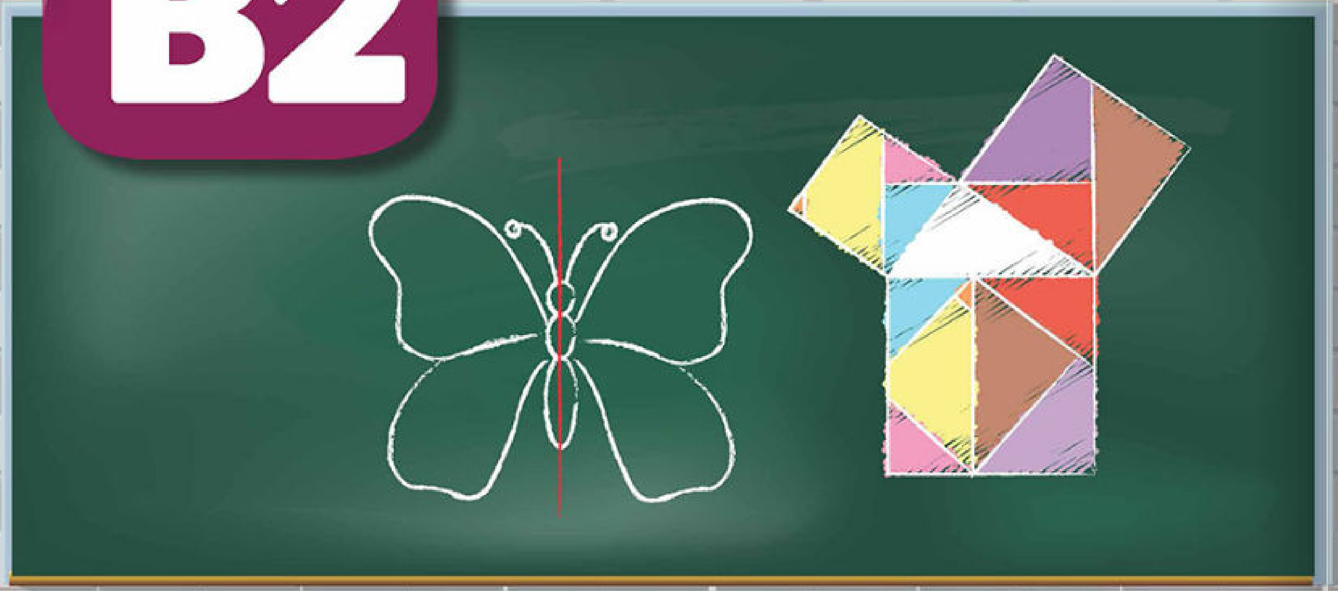
5. Las siguientes parejas de eventos son complementarios, a excepción de una, ¿cuál no es complementaria?
A) Experimento: Lanzar un dado. E (A): "Que caiga un número menor a 3".
E (B): "Que caiga un número mayor o igual a 3".
B) Experimento: Lanzar un dado. E (A): "Que caiga un número par".
E (B): "Que caiga un número impar".
C) Experimento: Lanzar un dado. E (A): "Que caiga un número menor a 5".
E (B): "Que caiga un 6".
D) Experimento: Lanzar un dado. E (A): "Que caiga un número menor a 4".
E (B): "Que caiga un número mayor o igual a 4".

6. De acuerdo con la tabla siguiente, los valores de moda, mediana y media aritmética ($\bar{x}$) son:

Horas diarias frente al televisor	Frecuencias
Menos de una hora	10
1 a 2 horas	25
2 a 3 horas	18
3 a 4 horas	60
Más de 4 horas	15

A) $Mo = 60$ $M_e = 18$ $\bar{x} = 25.6$ B) $Mo = 60$ $M_e = 25$ $\bar{x} = 128$
C) $Mo = 60$ $M_e = 18$ $\bar{x} = 6$ D) $Mo = 25$ $M_e = 18$ $\bar{x} = 60$

B2



Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras

Evaluación diagnóstica

Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta cuando corresponda.

1. El área de un cuadrado es 196 cm², ¿cuánto mide por lado?

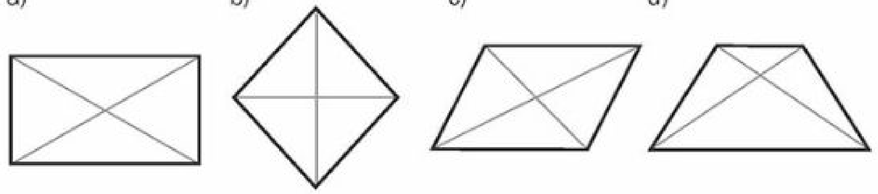
   a) 44 cm b) 14 cm c) 49 cm d) 15 cm

2. ¿Cuál es el factor común de los números 12, 44 y 60?

   a) 5 b) 12 c) 4 d) 3

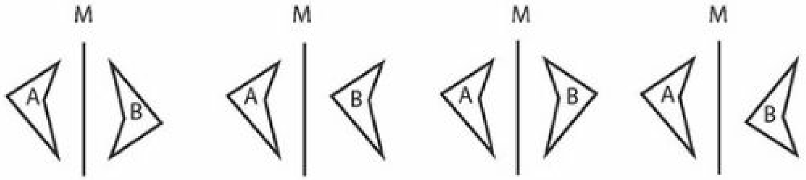
3. ¿En cuál de los cuadriláteros están trazados los ejes de simetría?

   a) b) c) d)



4. ¿En cuál de las siguientes opciones, la figura B es la reflexión con respecto a la recta M de la figura A?

   a) b) c) d)



5. ¿Cómo se verá la figura 1 si es rotada 180° en sentido contrario a las manecillas del reloj?

   a) b) c) d)

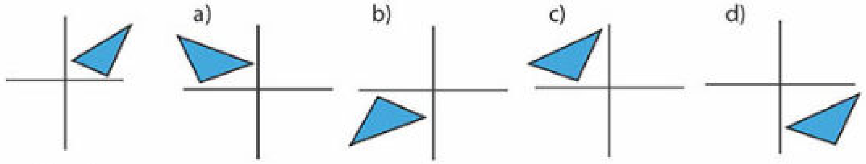


Figura 1

6. Un triángulo rectángulo puede tener:

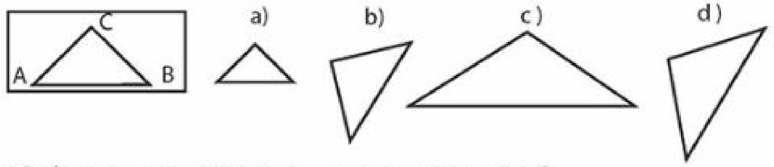
   a) Un ángulo recto y dos ángulos agudos

   b) Un ángulo recto y dos ángulos obtusos

   c) Un ángulo recto, un ángulo agudo y un ángulo obtuso

   d) Dos ángulos rectos

7. ¿Cuál de los siguientes triángulos es congruente al triángulo ABC?



8. ¿Cuál es la probabilidad de un evento imposible?

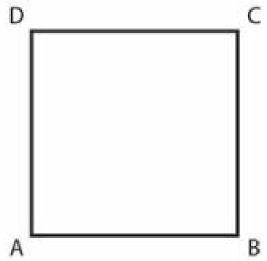
   a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) No se sabe

9. Traza las líneas que se solicitan a continuación.

   a) Una paralela a $\overline{AB}$

   b) Una perpendicular a $\overline{CD}$

   c) Las diagonales del cuadrado ABCD



10. Dibuja dos figuras geométricas que sean semejantes con una razón 2 a 1.

Patrones y ecuaciones

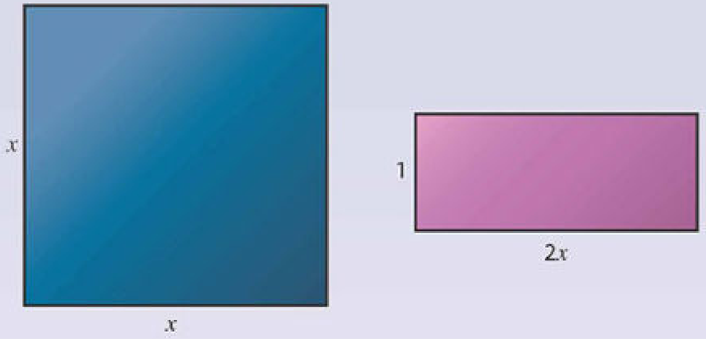
Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización

Lección 11. Ecuaciones cuadráticas I

Recuerdas de la lección 1, ¿por qué una raíz cuadrada tiene dos soluciones? Coméntalo con un compañero. ¿Qué métodos han utilizado hasta ahora para resolver ecuaciones cuadráticas? Anótenlos en su cuaderno.

Supera el reto

A Leonor le dejaron una tarea que no sabe cómo resolver. En parejas, ayúdenla observando las figuras y contestando las preguntas.



a) ¿Cuál es el área del cuadrado?
b) ¿Cuál es el área del rectángulo?
c) ¿Cuánto tiene que valer x en ambas figuras para que tengan la misma área?
   - Anoten el procedimiento que siguieron para encontrar el valor de x.
   - Comenten con el grupo las respuestas.

d) ¿Cuántas parejas calcularon el valor de x al "tanteo"?
e) ¿Cuántas parejas plantearon una ecuación para encontrar el valor de x?
   - Anoten las ecuaciones que plantearon.
   - ¿Cómo las resolvieron?
   - ¿Alguna pareja resolvió la ecuación factorizando?

Observa los siguientes ejemplos sobre factorización de las expresiones de la forma $ax^2 + bx$.

a) $8x^2 + 2 = 2(4x^2 + 1)$
b) $12x^2 - 6x = 6x(2x - 1)$

Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Qué pasos se siguieron para factorizar?
b) ¿Qué es el máximo factor común?

1. Con la finalidad de que apliques lo aprendido, factoriza las siguientes expresiones algebraicas de la forma $ax^2 + bx$.

$4x^2 + 2x =$	$7a^2 - 21a =$
$y^2 - 4y =$	$6b^2 - 12b =$
$x^2 - 8x =$	$a^2 + 2a =$
$x^2 + 8x =$	$100w^2 - 500w =$

Idea matemática

Para factorizar expresiones algebraicas de la forma $ax^2 + bx$ se busca expresarlas como un producto en el cual uno de los factores sea el máximo factor común.

En este caso, $ax^2 + bx$ se factoriza como: $x(ax + b)$, ya que x es el factor común de los dos términos.

La factorización que realizaste en los ejercicios anteriores también se puede utilizar para realizar cálculos aritméticos con mayor rapidez.

2. Encuentra los resultados de las siguientes operaciones factorizando de la misma manera que en los ejercicios anteriores. Observa el ejemplo:

Ejemplo : $8^2 + 8 = 8(8 + 1)$ $= 8(9)$ $= 72$	a) $50^2 + 50 =$
b) $14^2 + 14 =$	c) $9^2 + 9$

a) Contesta las siguientes preguntas.
   - ¿Crees que el tipo de factorización estudiado en esta lección te serviría para hacer cálculos mentales?, ¿cómo lo harías?
   - Para resolver ecuaciones cuadráticas, ¿servirá la factorización?
   - ¿Pueden resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$?, ¿cómo?

Coméntenlo en forma grupal y lleguen a una conclusión con ayuda de su profesor.

3. En su cuaderno, resuelvan las siguientes ecuaciones factorizando.

$x^2 + x = 0$ $\quad x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

$y^2 - 12y = 0$ $\quad y_1 =$ ______ $y_2 =$ ______

$3a^2 - 4a = 0$ $\quad a_1 =$ ______ $a_2 =$ ______

$4x^2 + 12x = 0$ $\quad x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

a) Expliquen lo que hicieron en cada caso para determinar los valores de la incógnita.
b) Comprueben que los valores que obtuvieron son los correctos en cada ecuación en cada ecuación. Revisen sus resultados en grupo, validen sus procedimientos y, en caso necesario, corrijan los errores que detecten. Si hay dudas, aclárenlas con su profesor.

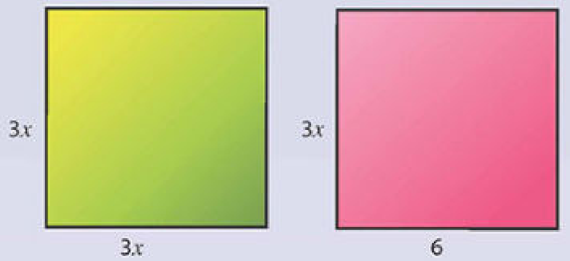
Idea matemática

Las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ se pueden resolver por factorización, ya que si el producto es igual a cero, significa que uno de los factores vale cero, por eso después de factorizar se iguala cada uno de los factores a cero y despejando resultan las dos soluciones. Ejemplo:

$$x^2 - 8x = 0$$
$$x(x - 8) = 0$$
$$x = 0 \text{ y } x - 8 = 0$$
$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 8$$

Supera el reto

1. Plantea en tu cuaderno una ecuación que se utilice para determinar el valor de x con la condición de que los dos cuadrados tengan la misma área. Posteriormente, resuélvela por factorización.

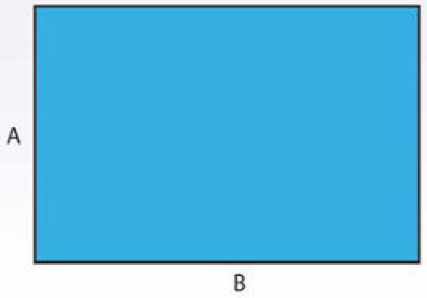


$x =$ ______

2. Traduce cada uno de los siguientes problemas a una ecuación, en tu cuaderno resuélvela por el método de factorización y escribe la solución en la columna correspondiente.

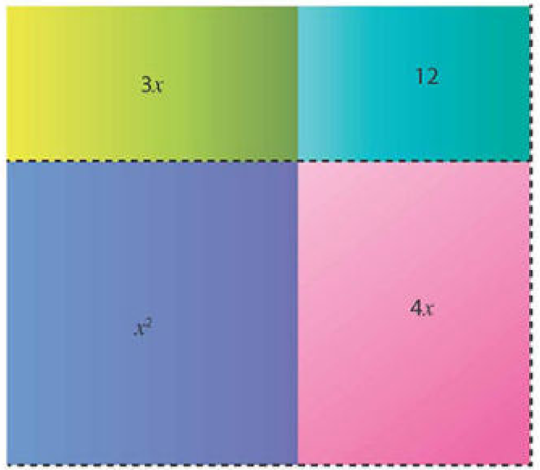
Problema	Ecuación	Solución
El producto de dos números consecutivos es cero. Encuentra esos números.		
El área de un jardín en forma de rectángulo, cuya base mide 4 m más que su altura.		
El área que cubre una fotografía en forma de cuadrado que cumple la siguiente condición: si a su área se le resta su perímetro se obtiene cero.		
El área de un cuadrado es igual a 8 veces la medida de su lado. ¿Cuánto mide por lado el cuadrado?		
Calcular el lado de un cuadrado, sabiendo que el triple de su área es igual a 21 veces la longitud del lado.		

3. Un rectángulo tiene una superficie igual a $x^2 + 17x = 60\,\text{m}^2$; determina las dimensiones A y B de dicho paralelogramo.



Organizados en parejas, analicen el problema, respondan las preguntas, y planteen una ecuación para resolverlo.

4. Cuatro integrantes de una familia han decidido juntar sus terrenos colindantes para construir una bodega. Se sabe que Juan tiene un terreno cuadrado de área x^2, Laura un terreno colindante a Juan, de área $3x$, Luisa tiene su terreno al lado de Juan y con área de 12 m² y Cesar tiene su terreno, junto a Luisa y Juan, el cual mide $4x$ de superficie.



a) ¿Cuáles son las dimensiones en términos de x del terreno en conjunto?
   - Observa que dichas dimensiones factorizan el área de todo el terreno.

b) ¿Cuál es el área total del rectángulo original en estos términos?
   - Efectúen la multiplicación.

Para comprobar, anoten las áreas de las cuatro figuras interiores y obtengan el área total en tres términos:

____ + ____ + ____ + ____ = ____ + ____ + ____

Es decir $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$. Lo anterior implica que al factorizar el trinomio determinamos las dos dimensiones del terreno.

- Comenten y expliquen en forma grupal, con ayuda de su profesor, por qué la expresión algebraica anterior es un polinomio de la forma $x^2 + bx + c = 0$ y por qué factorizar permite encontrar las raíces del polinomio.
- Encuentren el valor de x si se sabe que el área total del terreno es de 72 m. Planteen una ecuación de la forma $x^2 + bx + c = 0$.
- Sinteticen el conocimiento y completen en su cuaderno el cuadro de la siguiente página.

Idea matemática

Una ecuación de la forma $x^2 + bx + c = 0$, por ejemplo $x^2 + 4x - 96 = 0$, se puede resolver factorizando como el producto de 2 binomios con un *término común*, por lo que se buscan 2 números que sumados den el coeficiente del término lineal x, y multiplicados, el término *independiente*.

En el ejemplo, ¿cuál es el signo del término independiente?

Esto quiere decir que uno de los números tendrá signo positivo y el otro signo negativo. ¿Qué determina cuál número es el positivo?

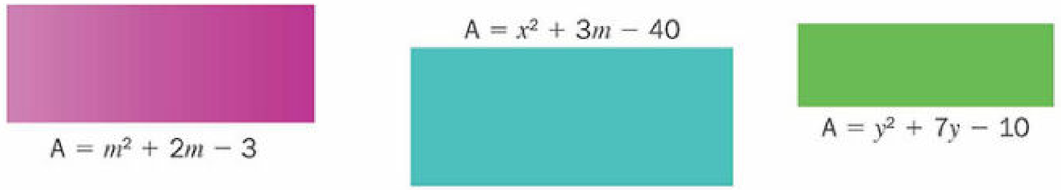
5. De manera individual, completa en tu cuaderno el siguiente cuadro.

> Anota todos los divisores de 96: ____________ (esto facilitará tus cálculos).
> Factoriza el trinomio $x^2 + 4x - 96 = (x + \_\_)(x - \_\_)$.
>
> Si $(x + \_\_)(x - \_\_)$, entonces al menos uno de los factores debe ser cero, de tal forma que *despejando* se obtiene:
> $$x + 12 = 0 \text{ y } x - 8 = 0$$
>
> de donde: $x_1 = -12$ y $x_2 = 8$ son las raíces de la ecuación.
> Observa que una raíz es de signo ____________ y la otra de signo ____________.

6. En parejas, resuelvan la ecuación que plantearon en el problema del terreno, por medio de la factorización.

   a) ¿Fue más fácil que con el método que habían utilizado primero? Coméntenlo con otra pareja.
   b) ¿Creen que en la solución del problema anterior se toma la raíz positiva de la ecuación y no el negativo?, ¿por qué? Coméntenlo en forma grupal y concluyan con ayuda de su maestro.

7. Encuentra las medidas de los lados de los siguientes rectángulos, dadas sus áreas. Resuelve por factorización en tu cuaderno.



8. Completa las expresiones de manera que se cumpla la **identidad**. Escribe los resultados en tu cuaderno.

a) $(b + 9)(\ \ -\ \ ) = b^2 + 6b - 27$
b) $(\ \ -\ \ )(\ \ +\ \ ) = m^2 - 7m - 18$
c) $(v - 7)(\ \ +\ \ ) = v^2 - 2v - 35$

Palabra pi

identidad: es una igualdad que es cierta para cualquier valor que adquieran las literales.

Por ejemplo:
Si x fuera igual a 3

$2x + 2 = 2\,(x + 1)$
$2x + 2 = 2\,(3 + 1)$
$2(3) + 2 = 2(4)$
$6 + 2 = 8$
$8 = 8$

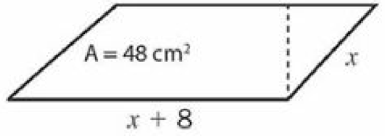
O por ejemplo:
Si x fuera igual a -4

$2x + 2 = 2(x + 1)$
$2x + 2 = 2(-4 + 1)$
$2(-4) + 2 = 2(-3)$
$-8 + 2 = -6$
$-6 = -6$

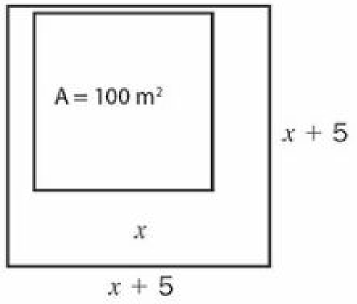
9. Resuelve factorizando en tu cuaderno los siguientes problemas.

   a) El área de un terreno en forma de rombo es de 20 m². Si su diagonal mayor mide 3 m más que su diagonal menor, ¿cuáles son las medidas de sus diagonales? ____________

   b) ¿Cuántos centímetros mide la base y cuántos la altura del romboide?



   c) ¿Cuántos metros mide por lado el cuadrado externo de la siguiente figura?



Comparen sus respuestas con un compañero e interpreten las ecuaciones que establecieron. Verifiquen que su planteamiento sea correcto y que estén resueltas por factorización.

10. Individualmente, utiliza el procedimiento de la factorización para solucionar las ecuaciones y los problemas siguientes en tu cuaderno.

a) ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $12x + 36 = -x^2$?

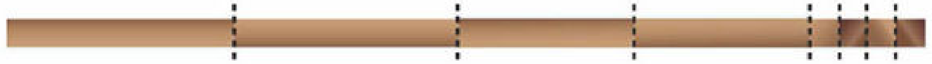
b) La diferencia de dos números es 1 y la suma de sus cuadrados es 61. ¿Cuáles son esos números?

c) Tita es un año mayor que Micaela y la suma de los cuadrados de ambas edades es 313. ¿Cuáles son las edades de Tita y Micaela?

d) Un polígono de n lados tiene $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales. ¿Cuántos lados tiene un polígono de 14 diagonales?

e) Determina las dimensiones de un triángulo rectángulo cuyas dimensiones son tres enteros positivos.

f) Al desarmar las piezas que forman el marco de una fotografía y colocarlas alineadamente, como se muestra en el dibujo, se forma un rectángulo cuya área es 72 cm². ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que se forma?



- ¿Cuál ecuación plantea el problema?
- Escribe la ecuación anterior en términos de x y de la forma: $x^2 + bx + c = 0$.
- ¿Qué se puede hacer para simplificar la ecuación y resolver por medio de la factorización?
- ¿Cuál es la ecuación factorizada?
- ¿Consideras que resolver ecuaciones cuadráticas por el método de factorización simplifica los cálculos? Explica ampliamente tus razones.

g) Determina la ecuación cuadrática cuyas raíces son:

$x_1 = 3, \quad x_2 = -1$
$x_1 = 5, \quad x_2 = 7$
$x_1 = -4, \quad x_2 = -1$
$x_1 = -4, \quad x_2 = 3$
$x_1 = -4, \quad x_2 = -3$

Comenta con un compañero la forma en que resolviste el ejercicio anterior; comparen y argumenten sus respuestas.

Con ayuda de su profesor, concluyan el procedimiento que se utiliza para determinar la ecuación cuadrática si se conocen sus raíces. Redáctenla en su cuaderno.
¿Qué habilidades consideras que desarrollaste en esta lección?

Idea matemática

Se llaman **raíces de una ecuación** a los valores que dan solución a una ecuación.
Cuando se tiene una ecuación lineal sólo se obtiene una raíz.
Ejemplo:

- $x + 12 = 0$, tiene como única raíz a $x = -12$ pues al sustituir este valor en la ecuación se obtiene que $-12 + 12 = 0$.

Cuando se tiene una ecuación cuadrática se pueden obtener dos raíces reales y éstas a su vez pueden ser dos raíces diferentes o dos raíces iguales en cuyo caso se denominan raíces dobles.

Por ejemplo:

- $x^2 - x - 72 = 0$, tiene raíces $x_1 = 9$ y $x_2 = -8$
- $15x^2 - 25x = 0$, tiene raíces $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{5}{3}$

Son ecuaciones cuadráticas con dos raíces diferentes

Pero, por ejemplo:

- $x^2 - 6x + 9 = 0$, tiene raíces $x_1 = 3$ y $x_2 = 3$

Es una ecuación cuadrática con una raíz doble, pues se repite dos veces el mismo valor

Explora

Para que refuerces los conocimientos adquiridos en la lección, entra al sitio: http://quiz.uprm.edu/tutorials_master/Cuad_Eq/cuadeq_home.html y observa los ejemplos de resolución de ecuaciones cuadráticas por el método de factorización. Practica con los ejercicios que se proponen. (Consulta: 23 de enero de 2017).

Figuras y cuerpos

Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

Lección 12. La Tierra I

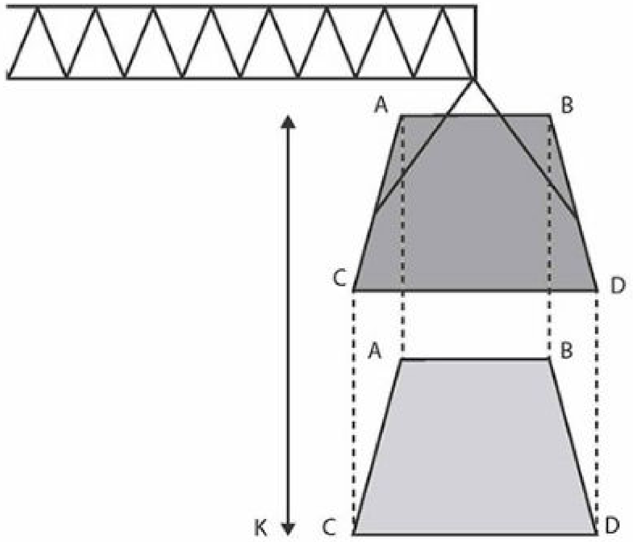
El Sistema Solar está formado por el Sol, 8 planetas, alrededor de sesenta satélites naturales gravitantes alrededor de los planetas, millares de asteroides, millones de cometas, meteoritos y miles de millones de piedras como polvo cósmico y gas.

1. Escribe los nombres de los 8 planetas y del satélite natural de nuestro planeta.

   La Tierra se desplaza alrededor del Sol en un movimiento cuya duración es de 365 días con 6 horas y da lugar a las 4 estaciones del año, ¿cuáles son éstas?
   ¿Qué nombre recibe el movimiento de la Tierra que permite el transcurso del día y la noche?
   ¿Qué nombre recibe el movimiento que da lugar a las estaciones del año?

2. Analiza la situación y contesta lo que se pide. Escribe las respuestas en tu cuaderno.

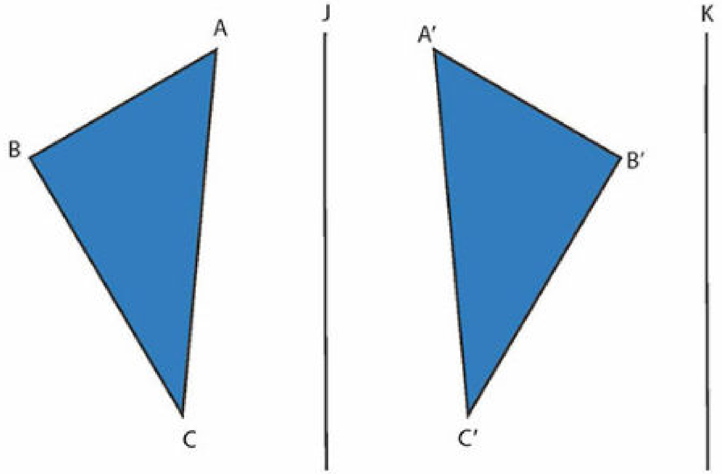
   a) Una grúa transporta una pieza de concreto en forma de trapecio, con vértices ABCD, que se colocará en una construcción.



   b) Traza el trapecio A'B'C'D' del lado derecho de la recta K, reproduce 4 veces la flecha que indica la directriz, de modo que los trazos sean paralelos entre sí y empiecen en cada vértice del cuadrilátero como en la ilustración. Contesta las preguntas:

   - Para trazar dicha pieza de concreto, ¿se tuvo que girar?
   - ¿Se desplazó? Entonces podría afirmarse que hubo una traslación.
   - Explica qué es una traslación.

   c) Traza un triángulo con simetría axial al triángulo A'B'C' respecto al eje K que está a la derecha.
   - Nombra los vértices de la figura que trazaste con A'', B'' y C''
   - Une con líneas punteadas los vértices AA'', BB'' y CC''



   - ¿Cómo son entre sí los segmentos AA'', BB'' y CC''? Mídelos.
   - $\overline{AA''}$ = ____________
   - $\overline{BB''}$ = ____________
   - $\overline{CC''}$ = ____________
   - Entonces ¿qué puedes afirmar acerca de los segmentos AA', BB' y CC'?
   - ¿Qué sucede cuando hay una doble simetría respecto de los ejes paralelos J y K?

Idea matemática

Una simetría axial es una transformación de los puntos del plano en sus puntos homólogos, de tal forma que el eje L, llamado eje de simetría, divide a la mitad y de forma perpendicular a cada segmento que une un punto P de una figura con su homólogo P'.

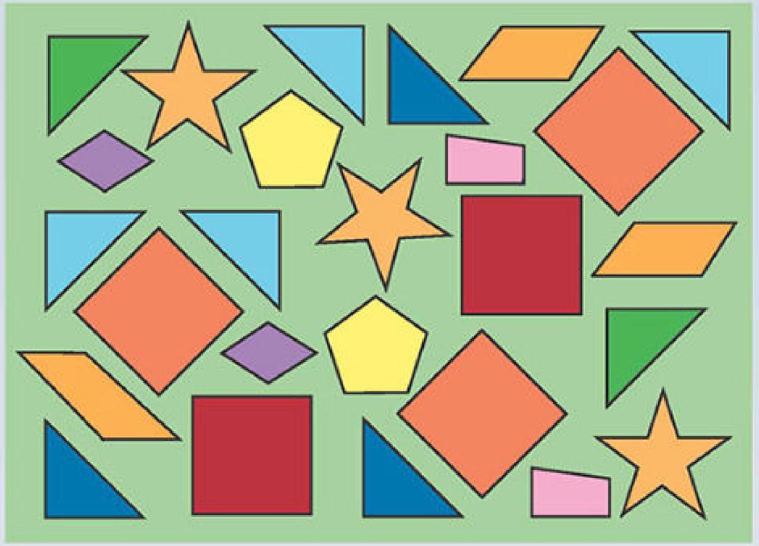
Reflejar una figura sucesivamente en dos rectas paralelas, tal como la actividad anterior, equivale a trasladar el doble de la distancia que hay entre las rectas en dirección perpendicular a ellas.

Supera el reto

1. Consigue una hoja de color. Dóblala por la mitad y traza una figura en la sección izquierda de tu hoja. Ahora dóblala de nuevo y calca la figura en el lugar que se traslapa de la otra sección.

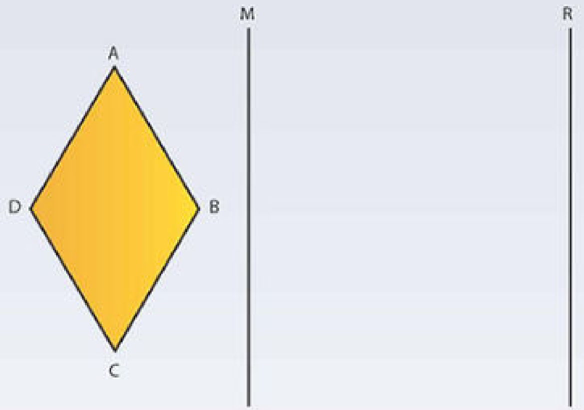
   - ¿Cómo son entre ellas las figuras que trazaste?
   - ¿Qué tipo de transformación realizaste?
   - ¿El doblez que realizaste en un principio, qué representa de la transformación?
   - ¿Podrías identificar otros ejes de simetría en tu figura? Justifica tu respuesta.

2. Reúnete con un compañero. Analicen la siguiente composición de figuras, señalen las que son el resultado de traslación y marquen las líneas que unen los vértices homólogos correspondientes.



- Con ayuda de su profesor verifiquen cuáles figuras geométricas son traslaciones y cuáles no. En cada caso, justifiquen por qué.

3. Observa el polígono y realiza lo que se indica:



- Toma como ejes las rectas M y R.
- Refleja el rombo ABCD respecto a M y el que obtuviste A'B'C'D' refléjalo respecto a R.
- Comprueba que el último rombo A"B"C"D" es una traslación del primero.
- ¿Cómo son entre sí las rectas M y R?
- Mide las distancias que hay de los vértices correspondientes del primer rombo con los del último y anótalas.

Figuras y cuerpos

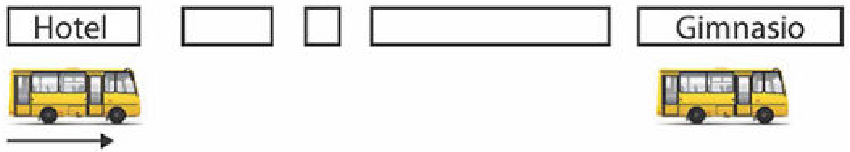
Lección 13. La Tierra II

Cuando la Tierra gira sobre su propio eje da lugar al día y la noche, proceso que dura 24 horas. ¿Cómo se le llama a este movimiento?

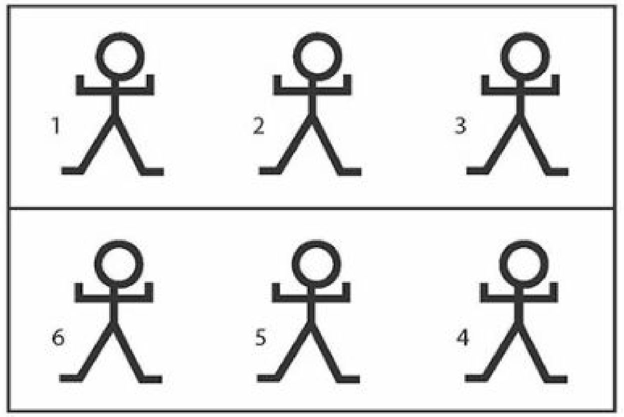
Los ejemplos de rotación y traslación se ejemplifican en la siguiente situación.

El equipo femenil mexicano de voleibol se trasladó en autobús de su hotel al gimnasio para realizar la práctica diaria. Durante el entrenamiento se realiza una rotación de las jugadoras en el sentido de las manecillas del reloj siempre y cuando se recupere el balón después de ganar un tanto.

Remarca el traslado del autobús al gimnasio.



Un equipo de voleibol resulta vencedor cuando gana 3 de 5 sets. Cada set se gana cuando uno de los equipos supera los 25 puntos.



1. En el juego Canadá vs México, el primero inició sacando y ganando, pero por cada punto de Canadá la selección femenil de México hizo 2 puntos seguidos.

   a) Sin hacer cambios en este set, ¿cuál es el número de la jugadora mexicana que terminó sacando para ganar el partido? Considera que sus números son del 1 al 6 y están acomodados de acuerdo con su numeración en un arreglo circular como en un reloj.
   b) ¿Cuál fue el marcador final del primer set?
   c) ¿Qué entiendes por rotación? ¿Cuál es la similitud entre traslación y rotación?
   d) ¿Cuál es la diferencia entre estas dos transformaciones?

Idea matemática

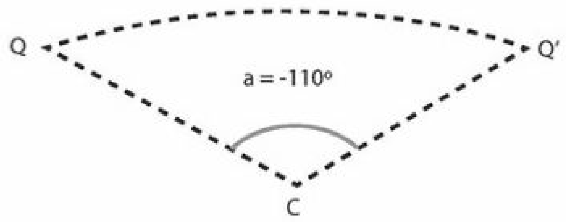
Para indicar una rotación es necesario proporcionar el centro de rotación (c), el ángulo y su sentido. Observa la siguiente ilustración. Si el ángulo es negativo, el sentido del giro es en dirección del movimiento de las manecillas del reloj; si es positivo, será en sentido contrario.

La rotación de un punto

La imagen de un punto bajo una rotación se obtiene trazando un segmento que una al punto con el centro de giro y después se gira el segmento de acuerdo con el ángulo de la rotación. La posición final del extremo móvil es la imagen del punto. Ejemplo:

Punto = Q, ángulo = –110° y C = centro.

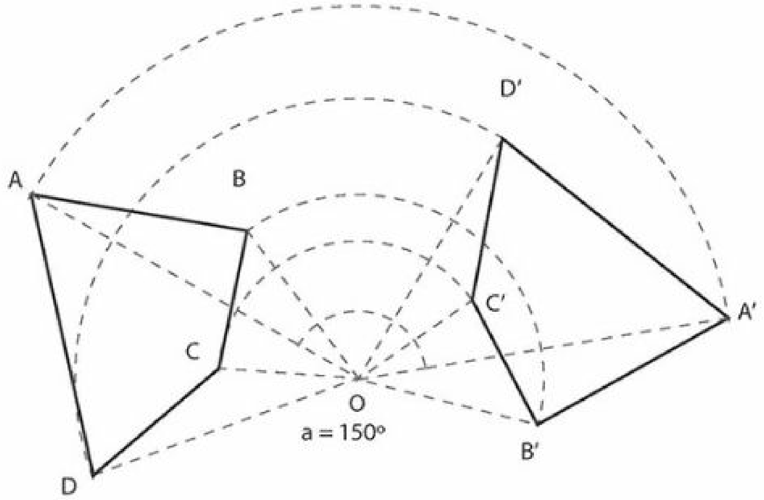
Se traza un ángulo negativo (en el sentido de las manecillas del reloj) de 110°, con vértice en C y lado base el segmento CQ, luego se hace la rotación del punto Q. Esto es, se mide la distancia de C a Q y se traza esta distancia en el otro lado del ángulo, para obtener un segmento CQ' con la misma longitud que CQ. Entonces, Q' es la imagen de Q.



La rotación de un polígono

Para obtener la imagen de un polígono se hace la rotación de sus lados y el polígono que resulta es la imagen. Ejemplo:

Considera el cuadrilátero ▱ABCD, el ángulo igual a –150° y O el centro de rotación.

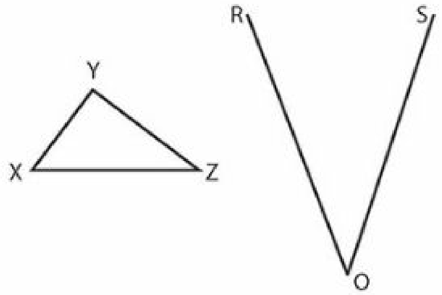


Se traza un ángulo negativo de 150° con vértice O y lado AO, y se rota A hasta A'. Se traza el mismo ángulo con vértice O y lado BO, y se rota B hasta B'; se sigue el mismo procedimiento para localizar los puntos C' y D'. Por último, se unen los puntos A', B', C' y D'. Observa que la medición de los ángulos es negativa porque se está rotando de izquierda a derecha.

2. Contesta las siguientes preguntas. Anota las respuestas en tu cuaderno.

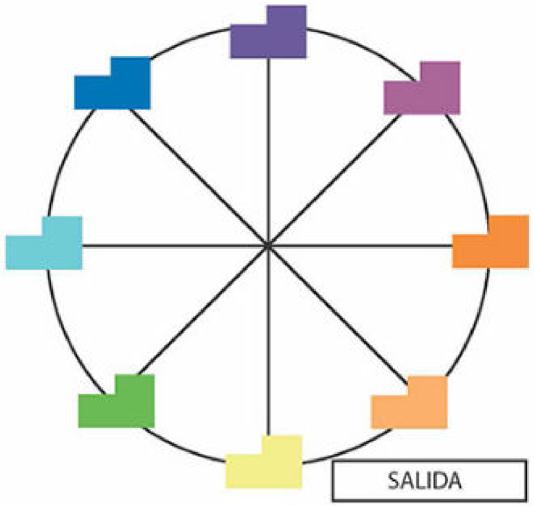
   a) ¿Los vértices homólogos de los dos polígonos anteriores están a la misma distancia?
   b) En la figura anterior, mide cada uno de los ángulos que se forman al unir una pareja de vértices homólogos con el punto O.
      ∡AA' = ________ ∡BB' = ________
      ∡CC' = ________ ∡DD' = ________
   c) Lo anterior indica que cada uno de estos 4 ángulos mide lo mismo que ________

3. Refleja el triángulo XYZ en la recta R y después refleja el triángulo obtenido en la recta S. Mide y anota el valor del ángulo que forman las rectas R y S: ________, éste es el ángulo de rotación.

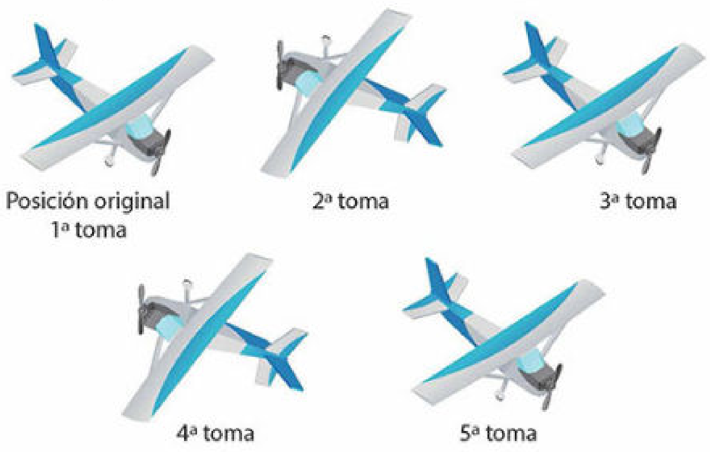


   a) ¿Qué trazo hiciste: el de una traslación o el de una rotación?
   b) Demuestra que lo que afirmas es correcto.
   c) ¿En qué se modifica el trazar una transformación en ejes paralelos que trazarla en ejes oblicuos?

4. En la rueda de la fortuna que aparece en la imagen se ubicaron todas las personas en sus respectivas canastillas. La rueda tuvo una rotación de 1305° y después de dar vueltas la canastilla que quedó en la salida se desocupó. ¿De qué color es dicha canastilla? Estando en esta posición, ¿cuántos grados más debe rotar la rueda de la fortuna para que quede en la salida la canastilla verde?

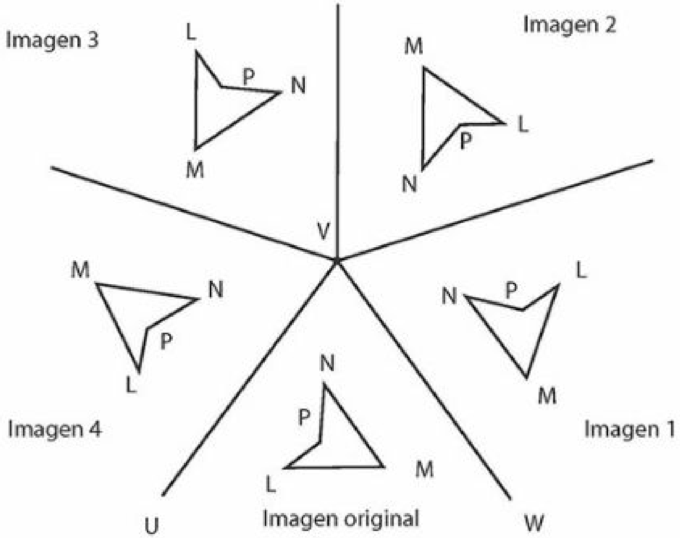


5. Un fotógrafo tomó varios momentos de una exhibición aérea. Acomodó las imágenes captadas de la siguiente forma, considerando el avión en pleno vuelo antes de comenzar sus piruetas.



a) Observa las imágenes y responde las preguntas:
   - ¿A cuál le aplicas una simetría para obtener la cuarta posición?
   - ¿La cuarta foto queda invertida con respecto a la posición original?
   - ¿Cómo quedaría la cuarta imagen en relación con la segunda?
   - ¿En cuáles fotos puede decirse que hubo una rotación?
   - Si las tomas siguieran la serie original, ¿la toma 15 quedaría invertida? ¿Por qué?

6. Contesta las cuestiones tomando como base las imágenes de la izquierda, donde se colocaron dos espejos sobre UV y VW.



a) ¿Cuánto mide el ángulo UVW?
b) ¿Qué número de imagen es una rotación de 115° con respecto a LMNP?
c) ¿Qué imágenes se obtienen mediante la rotación de LMNP?
d) ¿Cuánto mide el ángulo de rotación entre la imagen 1 y la imagen 4?

Supera el reto

1. Necesitas una lamparita de mano y una bola de unicel del número 4 a la cual le insertarás un palillo grande por el centro, como se muestra en la figura 1.

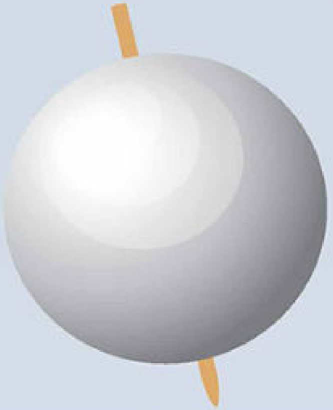


Figura 1

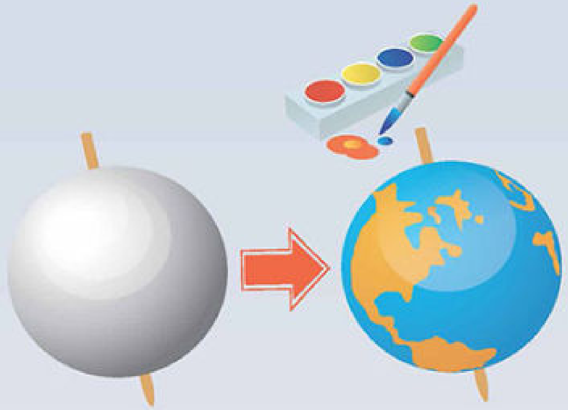


Figura 2

Después, con pintura de agua y un pincel, pinta de color azul la bola. Enseguida dibuja con color café los continentes, como se muestra en la figura 2; tendrás una escala del planeta Tierra.

Toma tu bolita (planeta Tierra) y con tu otra mano alúmbrala con la lámpara. Manteniendo la luz en una misma posición, gira despacio la Tierra (Figura 3).

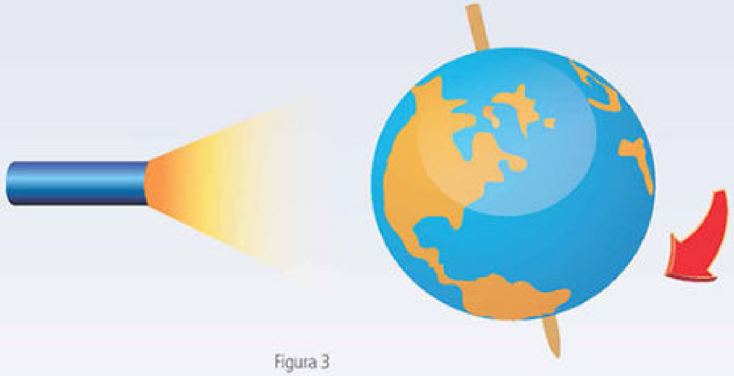


Figura 3

- ¿Qué movimiento estás representando?
- ¿Llega la misma intensidad de luz a toda la bola?
- ¿Qué continentes están sin luz al alumbrar el continente americano?

Ahora representa el movimiento de traslación tomando en cuenta que la lámpara simboliza al Sol.

2. Clasifica los ejemplos de movimientos que se proporcionan y completa la tabla.

Ejemplos de movimientos	Movimientos que representan una rotación
El movimiento de las manecillas del reloj	
El movimiento del metro sobre las vías	
El movimiento de un atleta al realizar un carrera	
El movimiento de las llantas de una bicicleta fija	
El movimiento de un trompo cuando llega al suelo	
El movimiento de la tierra que origina el día y la noche	**Movimientos que representan una traslación**
El movimiento de un competidor de jabalina al tomar impulso	
El movimiento de un "yo-yo"	
La caída libre de un objeto	
El movimiento de un huracán	
El movimiento del planeta Marte alrededor del Sol	

3. En tu cuaderno, explica en una tabla como la siguiente, las diferencias y similitudes de ambos movimientos.

Rotación y Traslación	
Diferencias	Similitudes

Explora

Para comprobar las propiedades de la rotación y la traslación, visita el sitio: http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/geoweb/movi4.htm (Consulta: 14 de junio de 2013). Mueve los vértices de las figuras y el centro de rotación y traslación de las figuras. Registra en tu cuaderno las propiedades y comparte tus observaciones con tus compañeros.

Figuras y cuerpos

Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras

Lección 14. La piedra del sol

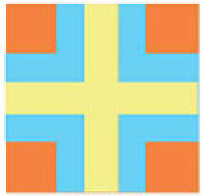
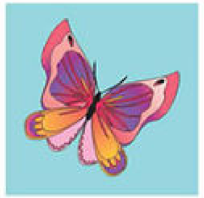
Si observas a tu alrededor verás que la geometría se encuentra en muchos objetos. Por ejemplo, los pueblos mesoamericanos desarrollaron una amplia gama de expresiones artísticas: arquitectura, cerámica, pintura, escultura, con las cuales trataban de explicarse el universo y situarse en él. Combinaban figuras humanas, animales, vegetales y diversos diseños geométricos, tratando de expresar armonía, belleza y, en algunos casos, funcionalidad.

1. La piedra del sol es una de las piezas más representativas del arte mexica. Observa la fotografía y responde.

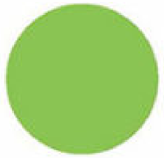
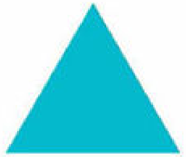
   a) ¿Será posible trazarle un eje de simetría?
   b) ¿Qué figuras son simétricas?
   c) Con ayuda de un compañero, identifiquen las partes simétricas de la Piedra del Sol.

2. A nuestro alrededor encontramos diversos objetos que tienen simetría.

   a) Traza el eje de simetría de las siguientes imágenes.

3. En Geometría, numerosas figuras presentan simetría axial. Como recordarás, en la primaria trazaste los ejes de simetría de los siguientes polígonos, algunos tienen más de uno, indica cuáles son.

Comenta con tus compañeros el número de ejes que encontraste en cada polígono.

Idea matemática

La simetría axial es una transformación que refleja las figuras del plano sobre una recta o eje de simetría, como si fuera un espejo. Por esta razón, a la imagen de una figura se le conoce como su simétrico.

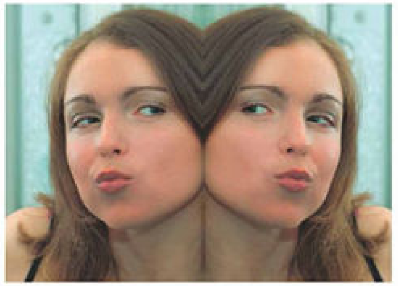
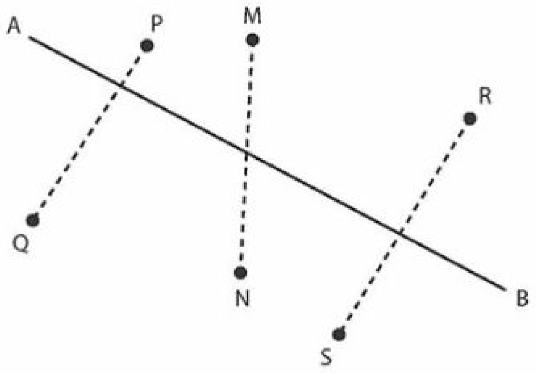


Imagen o simétrico de un punto

4. Observa la figura de la izquierda y contesta.
   a) ¿Cuáles parejas de puntos presentan simetría axial?
   b) ¿Por qué piensas que son simétricos?
   c) ¿Podrías proponer otro eje axial? Explica tus razones.



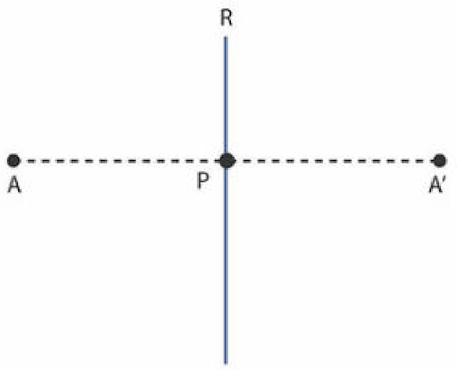
Idea matemática

Si tenemos un punto y el eje de simetría de la reflexión, el simétrico del punto se determina trazando una perpendicular desde el punto al eje de simetría. El simétrico se ubica del otro lado del eje y a la misma distancia que el punto.

Por ejemplo:

Si se requiere encontrar el simétrico del punto A teniendo el eje de simetría R:

1. Trazamos una perpendicular al eje de simetría desde el punto A
2. Prolongamos la perpendicular hasta que $\overline{AP} = \overline{PA'}$



$\overline{AP} = \overline{PA'}$ por lo tanto A y A' son simétricos

5. En la siguiente figura, encuentra los simétricos de los puntos P y Q tomando en cuenta los ejes de simetría.

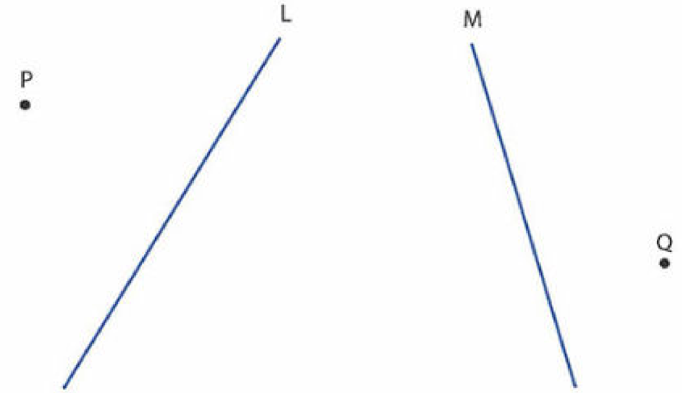
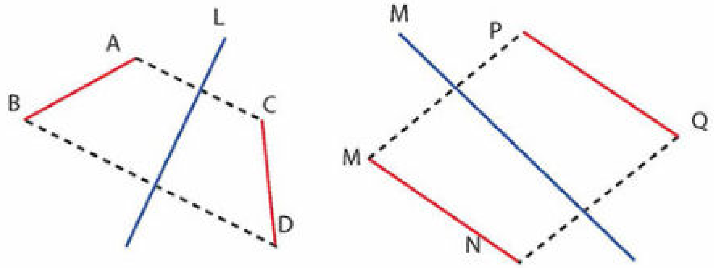


Imagen o simétrico de un segmento

6. Observa las figuras y responde lo que se solicita.
   a) ¿Cuáles parejas de segmentos presentan simetría axial?
      - Comenta con tus compañeros si los segmentos son simétricos con respecto al eje de simetría; justifiquen sus respuestas.



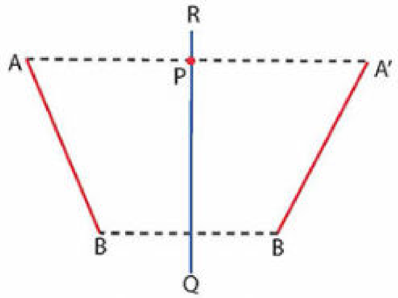
Idea matemática

Dos segmentos son simétricos respecto a un eje de simetría cuando los extremos de los segmentos determinan puntos simétricos.

Por ejemplo:

Si se quiere encontrar el simétrico del segmento AB teniendo el eje de simetría R:

1. Trazamos perpendiculares al eje de simetría desde los puntos A y B.
1. Prolongamos la perpendicular hasta que $\overline{AP} = \overline{PA'}$ y $\overline{BQ} = \overline{QB'}$.



Como $\overline{AP} = \overline{PA'}$ y $\overline{BQ} = \overline{QB'}$ entonces $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son simétricos.

7. Traza los segmentos simétricos con respecto a los ejes de simetría correspondientes.

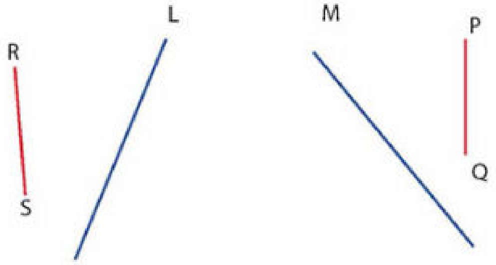
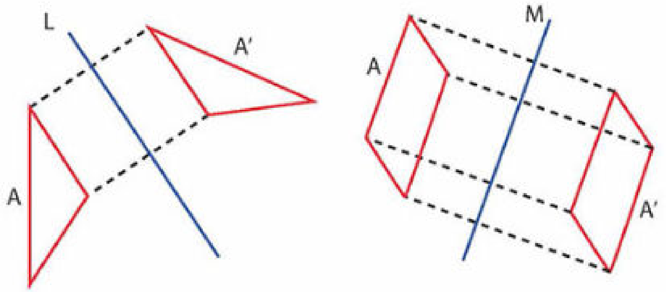


Imagen o simétrico de un polígono

8. Observa las figuras y contesta.
   a) ¿Cuáles parejas de polígonos presentan simetría axial?

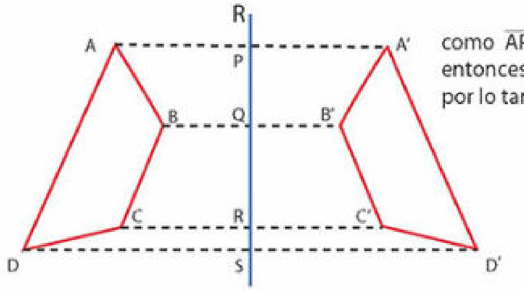


- ¿ Son simétricos?, ¿por qué?

Idea matemática

Dos polígonos son simétricos con respecto a un eje de simetría cuando cada punto de la figura *A* tiene un simétrico en la figura *A'*.
Por ejemplo:
Si queremos encontrar el simétrico del polígono *A* teniendo el eje de simetría *R*:

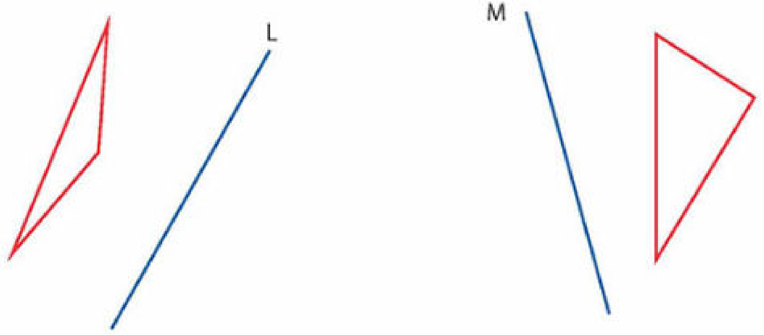
1. Trazamos perpendiculares al eje de simetría desde cada uno de los vértices del polígono.
2. Prolongamos la perpendicular hasta que $\overline{AP} = \overline{PA'}$ y $\overline{BQ} = \overline{QB'}$.



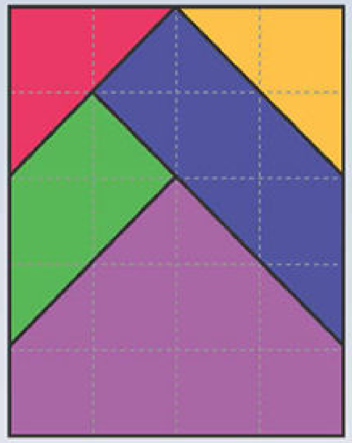
como $\overline{AP} = \overline{PA'}$ y $\overline{BQ} = \overline{QB'}$
entonces $\overline{CR} = \overline{RC'}$ y $\overline{DS} = \overline{SD'}$
por lo tanto ⏢ ABCD y ⏢ A'B'C'D son simétricos.

La simetría axial es una transformación que refleja las figuras del plano sobre una recta (eje de simetría) como si fuera un espejo. Al simétrico de un polígono también se le llama imagen.
Observa que las rectas que unen los puntos simétricos de cada figura son perpendiculares al eje de simetría y paralelas entre sí.

9. ¿Traza los polígonos simétricos con respecto a los ejes de simetría correspondientes.

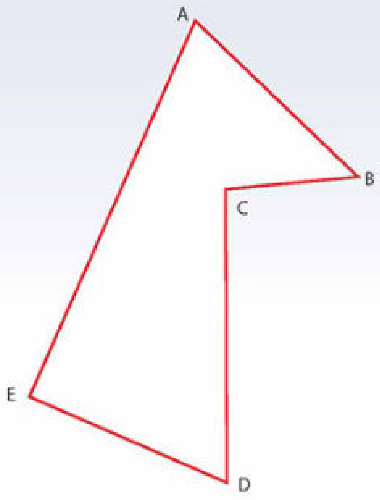


Supera el reto



1. Construye un rompecabezas (*tangrama*) como el de la izquierda.
   a) Recorta las piezas y arma figuras que tengan al menos un eje de simetría; trázalas en tu cuaderno.
      - ¿Cómo podrías saber si las figuras que armaste son simétricas?

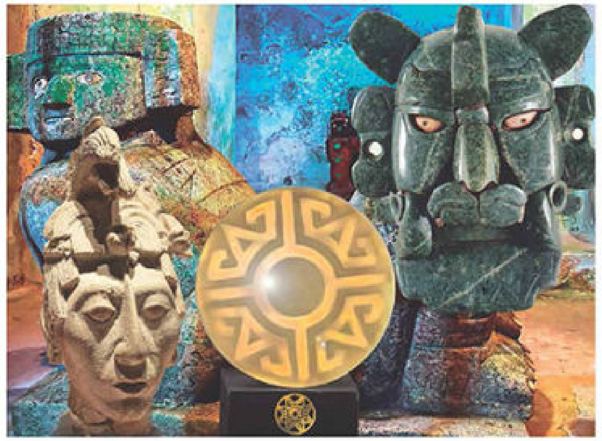
2. ¿Qué debemos hacer para construir un polígono simétrico al siguiente? Escribe el procedimiento.



Figuras y cuerpos

Lección 15. El arte prehispánico

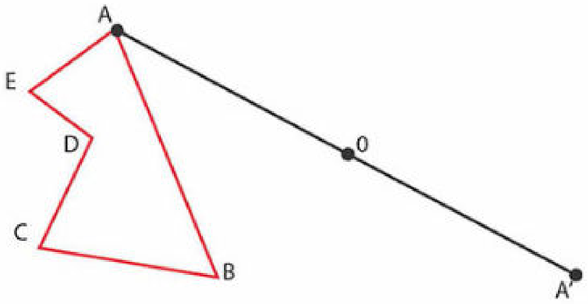
Observa la fotografía que ilustra algunas obras de arte de la cultura Nariña, en Colombia. En el arte prehispánico podemos encontrar muchos ejemplos donde se utiliza la simetría central, como el disco de oro que se encuentra en el pedestal.



¿Cuál crees que sea el centro de simetría?
Nuestros antepasados obtuvieron una figura simétrica a otra, pero invertida, ¿cómo lo habrán hecho?

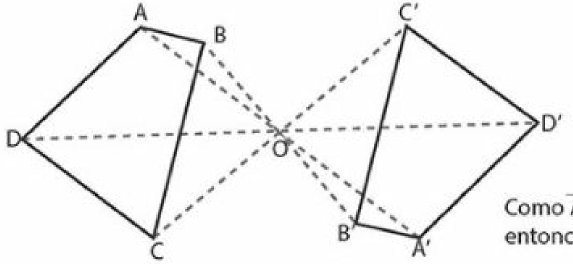
1. Reúnete con un compañero y comenten qué harían para obtener una figura simétrica a otra, pero invertida.

   a) Ahora traten de obtenerla, consideren la recta AA' y el punto O para obtener un polígono simétrico pero invertido; los puntos A y A' son simétricos con respecto al punto O.



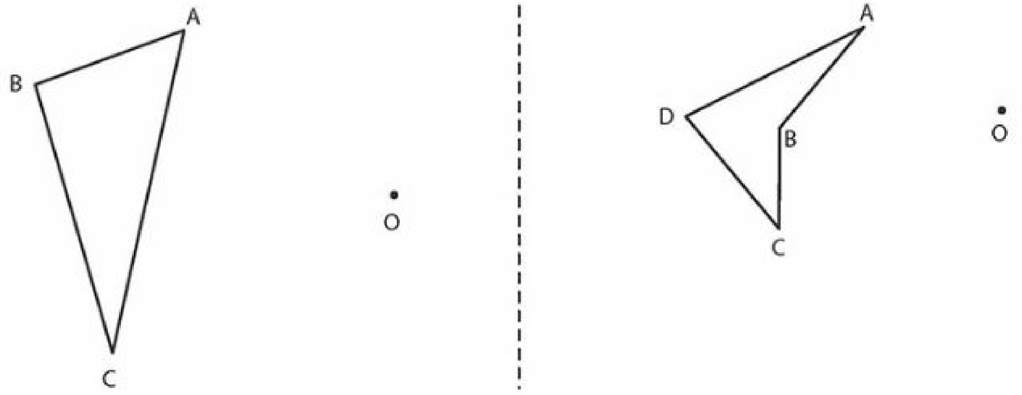
   b) Comparen el polígono original ABCDE con el polígono A'B'C'D'E' que acaban de obtener. Unan los vértices correspondientes de ambos polígonos con segmentos que pasen por el punto O. Mídanlos. ¿El punto O es el punto medio de los segmentos? Justifiquen su respuesta.

Observen que en este tipo de simetría, conocida como simetría central, las dos figuras simétricas están invertidas.

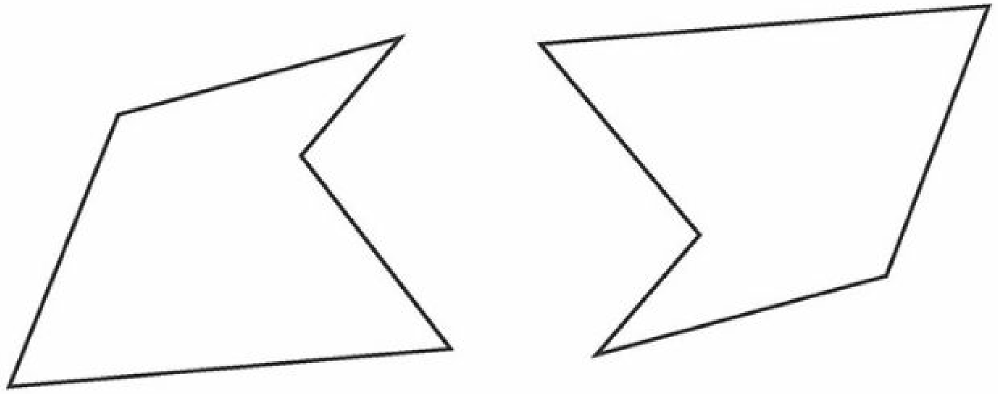


Como $\overline{AO} = \overline{OA'}$, $\overline{BO} = \overline{OB'}$, $\overline{CO} = \overline{OC'}$ y $\overline{DO} = \overline{OD'}$ entonces □ABCD y □A'B'C'D' son simétricos.

2. Traza el polígono simétrico de cada una las siguientes figuras con respecto al punto O.

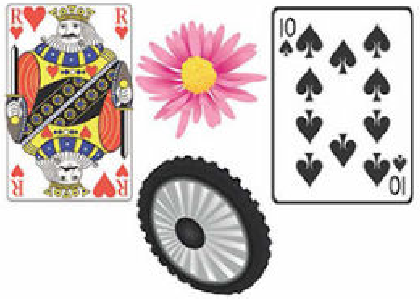


3. ¿Cuál es el centro de simetría de las figuras?



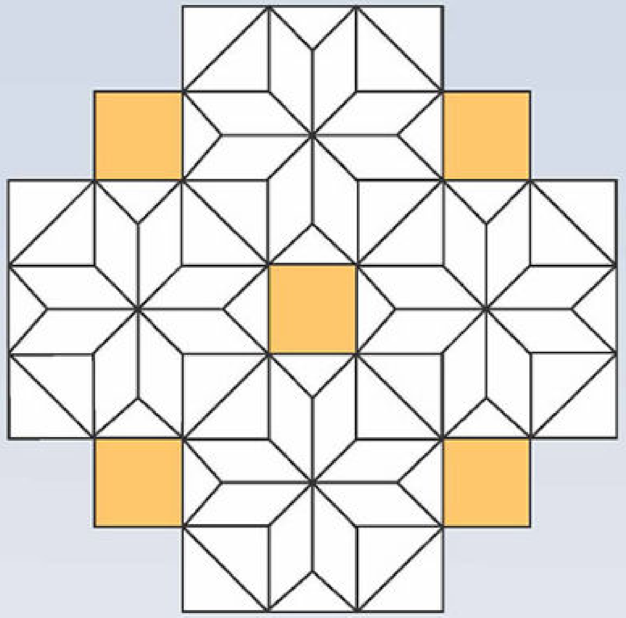
Idea matemática

La simetría con respecto de un punto O es la simetría central. En esta simetría todos los puntos tienen su homólogo que está a la misma distancia del punto central pero en la dirección opuesta, por lo que se puede ver la imagen original invertida. Algunos ejemplos de simetría central se encuentran en las cartas de la baraja de póquer, en las flores como las margaritas y en las ruedas de una bicicleta.

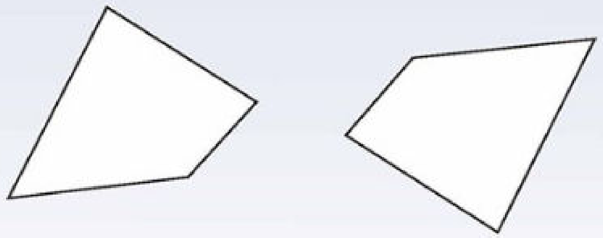


Supera el reto

1. ¿Cuál es el centro de simetría de esta figura?
   Localízalo.
   a) ¿Cómo sabemos que a una figura se le aplicó una simetría central con respecto a otra?



2. Escribe el procedimiento que se debe seguir para obtener el centro de simetría de las siguientes figuras.



3. Dibuja tres ejemplos de la vida cotidiana en los que puedas observar la simetría central.
   a) Traza en cada uno de ellos su centro de simetría.

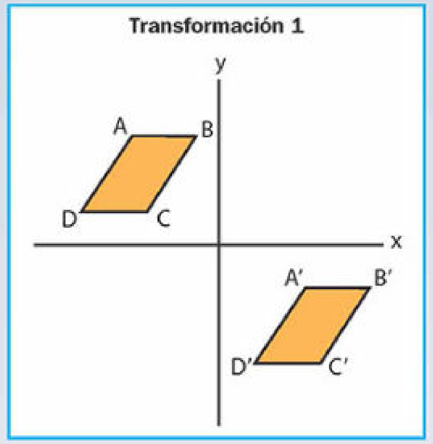
Dibujo 1	Dibujo 2	Dibujo 3

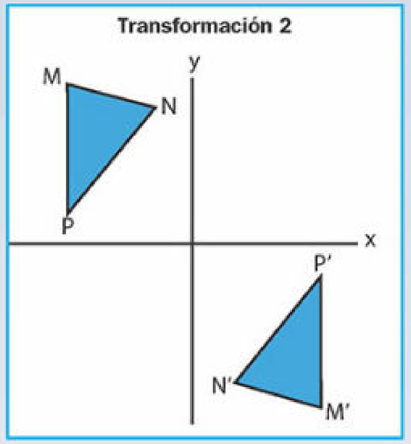
Figuras y cuerpos

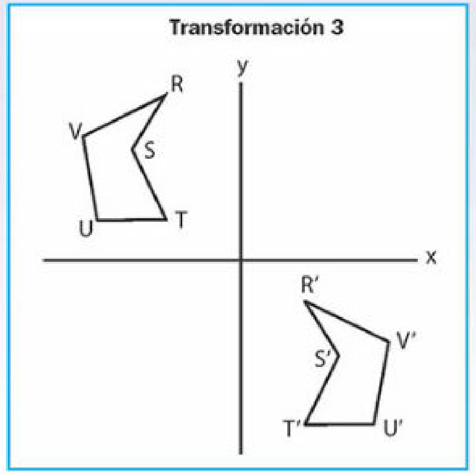
Lección 16. Transformaciones

Supera el reto

1. Reúnete con un compañero. En cada transformación, escriban qué tipo o tipos de transformaciones se realizaron de la figura inicial para llegar a la figura final. En cada situación, marquen con líneas punteadas las transformaciones que identificaron.

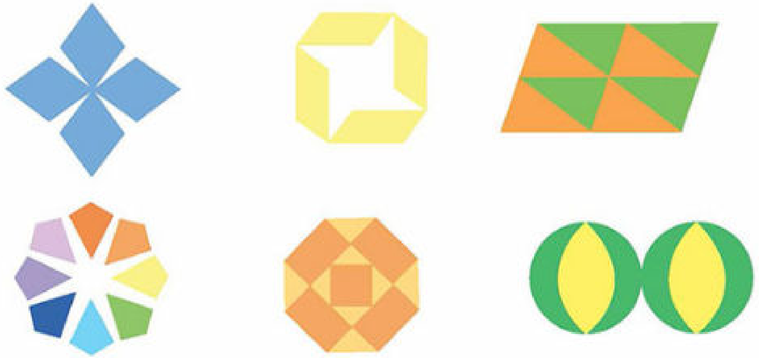






a) Midan los lados y ángulos homólogos de las figuras, ¿qué sucedió con sus medidas?
   Presenten al grupo sus análisis y lleguen a conclusiones con ayuda de su profesor.

1. Organizados en equipos de seis integrantes, elijan una de las siguientes figuras, analicen y escriban un mensaje para construirlas usando traslación, rotación y simetrías. Después, intercambien los mensajes y, siguiendo las indicaciones, reproduzcan la figura en su cuaderno.

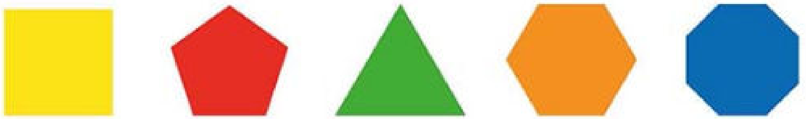


   a) Comparen la figura que construyeron con la original. Si no obtuvieron la figura deseada, analicen cuál fue la razón, ¿se debió a las instrucciones o a que no comprendieron la transformación que debía trazarse? Vuelvan a intentarlo.

2. Dibuja o pega tres imágenes que presenten más de una simetría. Traza los ejes de simetría y el centro de simetría correspondientes.

3. Traza un polígono, aplícale una simetría axial con un eje externo al polígono. Posteriormente, realiza una rotación con un ángulo negativo de 120°, finalmente aplica una simetría central. ¿La figura final se deformó con respecto a la primera?

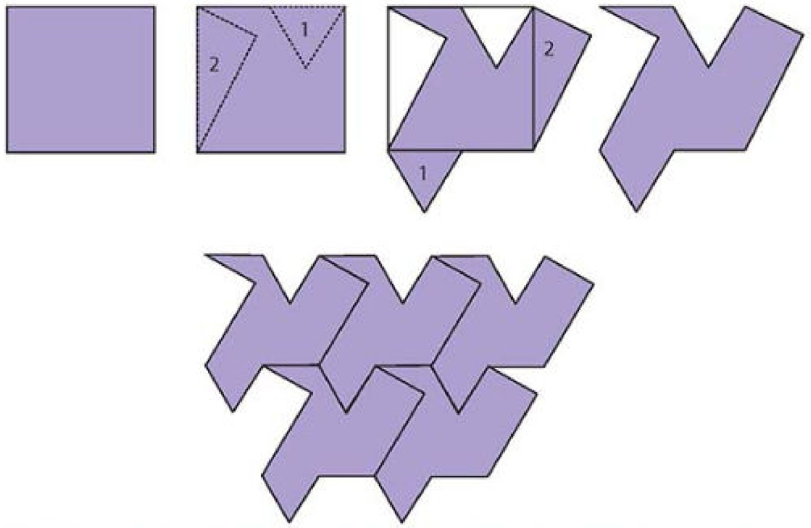
4. Organizados en parejas, tracen y recorten en papel de colores 20 piezas de cada uno de los siguientes polígonos regulares. Seleccionen algunos y construyan mosaicos por traslaciones, por rotaciones o por simetrías. Busquen una superficie plana para formarlos y luego peguen sus diseños en sus cuadernos.



Idea matemática

Utilizando el método de "quita y pon", puedes crear figuras geométricas irregulares y diseñar con ellas tus propios mosaicos. Este procedimiento consiste en dibujar una figura geométrica que por sí sola cubra el plano, como un paralelogramo o un triángulo. Luego se le van sacando partes de un lado, para luego trasladarlas en el lado contrario. Esta imagen se repite las veces que sea necesario y se van colocando de modo que encajen perfectamente, utilizando las transformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría).

Observa el procedimiento de la imagen:



5. Manos a la obra, diseña tu propio mosaico.

Explora

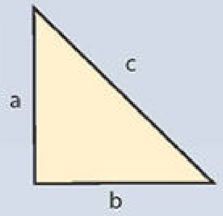
Para practicar los diferentes tipos de transformaciones, resuelve las actividades que se proponen en la siguiente página electrónica: http://www.sectormatematica.cl/Novedades/isometria.pdf (Consulta: 23 de enero de 2017).

Medida

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo

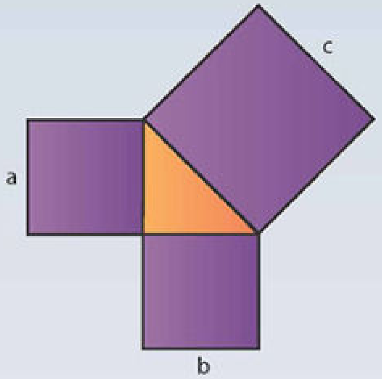
Lección 17. Un triángulo muy peculiar

Supera el reto



1. De manera individual, realiza lo que se indica a continuación.
   a) Calca en tu cuaderno el triángulo, cuyos lados son a, b, y c, contesta las preguntas.
   - De acuerdo con la medida de sus lados, ¿qué nombre recibe este triángulo?
   - De acuerdo con la medida de sus ángulos, ¿de qué tipo de triángulo se trata?

   b) Construye un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo, como se muestra en la figura de la derecha, y anota la letra que corresponda.

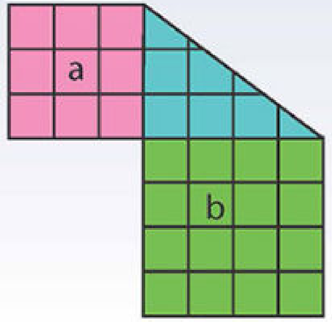
   

   c) Mide y calcula las áreas de los cuadrados que acabas de construir.
   - ¿Cuál es el área del cuadrado formado sobre el lado a?
   - ¿Cuál es el área del cuadrado formado sobre el lado b?
   - ¿Cuál es el área del cuadrado formado sobre el lado c?

   d) Recorta los cuadrados pequeños.
   e) Traza una diagonal sobre cada uno de ellos.
   f) Colócalos de tal manera que cubran la superficie del cuadrado mayor.
   g) ¿Qué relación existe entre las áreas de los cuadrados de los lados más pequeños (a y b) y el lado más grande (c)?

En grupo, con apoyo del profesor, revisen sus respuestas.

2. Realiza lo que se indica.

   a) Construye otro triángulo rectángulo cuyas medidas de los lados menores sean 3 cm y 4 cm.
   ¿Cuánto mide el lado mayor de este triángulo?
   b) En una hoja cuadriculada, traza y recorta dos cuadrados cuyos lados tengan las medidas de cada uno de los del triángulo que acabas de construir y anota las letras *a*, *b* como se muestra en la figura.

   c) En la misma hoja cuadriculada, recorta un cuadrado que tenga la medida del lado mayor del triángulo y anota la letra c.
   - ¿Cuántos cuadros tiene el cuadrado a?
   - ¿Cuántos cuadros tiene el cuadrado b?
   - ¿Cuántos cuadros tiene el cuadrado c?

   d) Completa las expresiones:
   - Área del cuadrado a + área del cuadrado b =
   - Área del cuadrado c − área del cuadrado b =
   - Área del cuadrado c − área del cuadrado a =

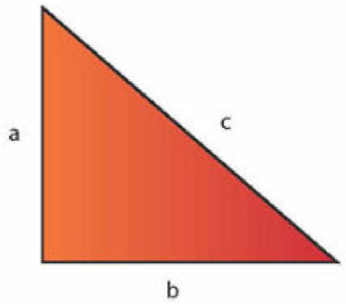
   e) Las expresiones anteriores pueden representarse completando las siguientes igualdades, de las cuales, la primera es conocida como el teorema de Pitágoras.

$$a^2 + b^2 =$$
$$c^2 + b^2 =$$
$$c^2 + a^2 =$$

En grupo y con apoyo del profesor, revisen sus respuestas.

Idea matemática

A la relación que existe entre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo se le conoce como teorema de Pitágoras y se enuncia así: "En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los **catetos** es igual al cuadrado de la **hipotenusa**".



Explora

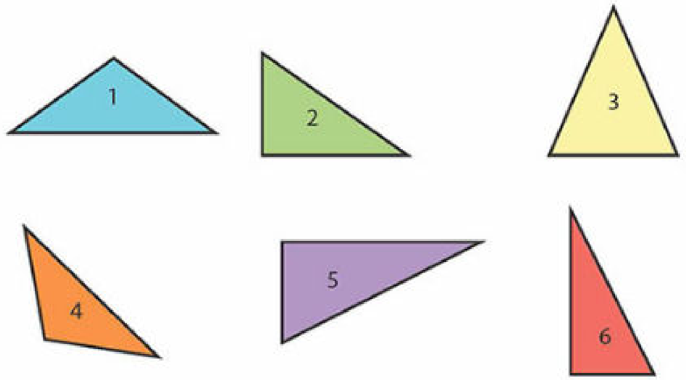
- Ingresa a la dirección electrónica www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras.html (Consulta: 15 de junio de 2013). Da un clic en *play* y encontrarás otras maneras de demostrar fácilmente el teorema de Pitágoras.
- Después ingresa a *Google* y en el buscador escribe: demostración del teorema de Pitágoras. Da un clic en imágenes y sorpréndete de todas las demostraciones que aparecen.
- En equipo, como trabajo de investigación, elijan una demostración y explíquenla a su grupo en clase.

Palabra pi

catetos. Lados adyacentes al ángulo recto de un triángulo rectángulo.
hipotenusa. Lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo.

1. De manera individual, sigue las instrucciones y completa la tabla con lo que se te pide.

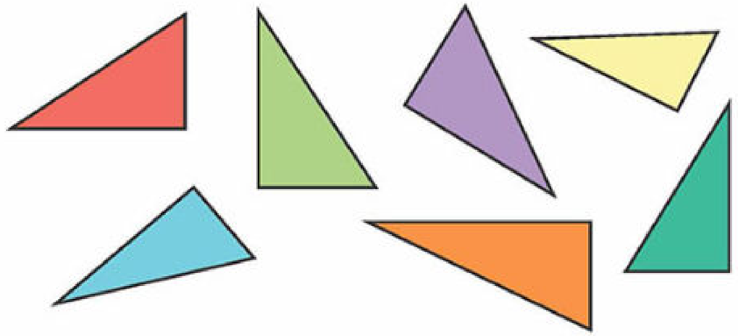
   a) Anota el nombre de cada triángulo según la medida de sus lados.
   b) Anota el nombre de cada triángulo considerando la medida de sus ángulos.
   c) Calcula el área de los cuadrados que se forman sobre los lados de cada figura.



Número de la figura	Nombre de acuerdo con la medida de sus lados	Nombre de acuerdo con la medida de sus ángulos	Suma de áreas de los cuadrados de lados menores	Área del cuadrado de lado mayor
1				
2				
3				
4				
5				
6				

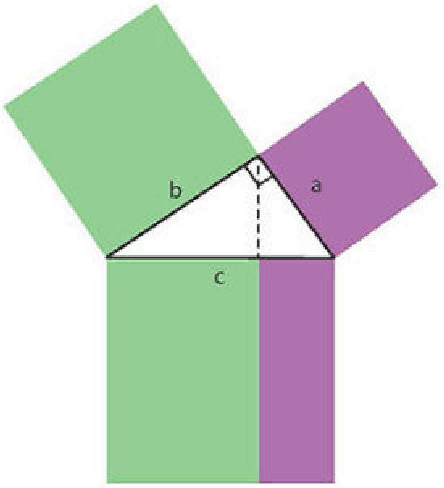
- ¿Qué figuras son triángulos rectángulos?

2. Señala los catetos y la hipotenusa de cada triángulo rectángulo en el lugar correspondiente.



3. Traza en el centro de una hoja blanca un triángulo rectángulo del tamaño que tú quieras. Recuerda que debe tener un ángulo de 90°.

   a) Sobre cada uno de los lados del triángulo traza un cuadrado de **arista** igual a la longitud del lado del triángulo correspondiente, coloréalos de diferentes colores.

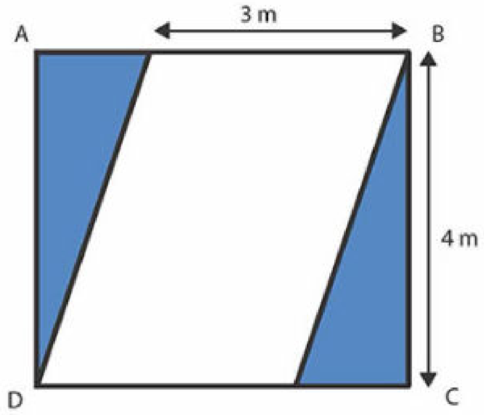


Palabra pi

arista. nombre que recibe cada uno de los lados de un polígono.

   b) Finalmente, recorta cada uno de los cuadrados que construiste y manipula tus cuadrados de tal forma que rellenes el mayor con los otros dos.
      - ¿Te fue fácil lograr el objetivo?
      - ¿Cómo son las áreas de los cuadrados pequeños respecto del área del cuadrado mayor?

4. Observa la figura y contesta las preguntas.



   a) Si la figura ABCD es un cuadrado, ¿qué parte del romboide que aparece es la suma de las áreas sombreadas?
      - Explica el procedimiento que seguiste para obtener la respuesta.

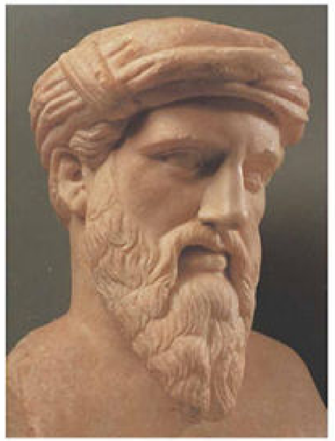
¿Cuál de las demostraciones vistas en esta lección te pareció más sencilla? ¿Por qué?

Medida

Explicitación y uso del teorema de Pitágoras

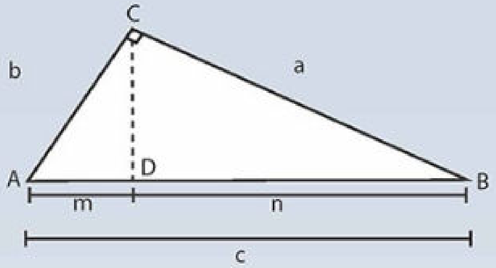
Lección 18. Pitágoras

¿Sabías que Pitágoras fue un filósofo y matemático griego que vivió en Grecia en el siglo IV a.n.e., considerado como el primer matemático puro y quien contribuyó de manera significativa en el avance de la geometría y la aritmética? Más aún, en la magna Grecia abrió dos escuelas en las que por primera vez se admitieron mujeres. Se dice que a este famoso personaje no le fue posible demostrar algebraicamente su teorema, pues sólo lo hizo geométricamente.



Supera el reto

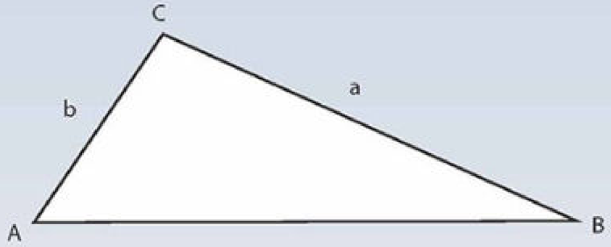
1. En equipo, contesten las preguntas con base en la figura.
   a) El triángulo ABC es rectángulo. ¿Cuál es el criterio que permite afirmar que los triángulos ABC y BCD son semejantes? Justifiquen su respuesta ante el resto del grupo.



2. En grupo, con apoyo del profesor, encuentren la justificación que haga falta para las siguientes afirmaciones.

Afirmación	Justificación
1. $\triangle ABC \approx \triangle BCD$	1. Por tener dos ángulos congruentes.
2. $\frac{a}{n} = \frac{c}{a}$	2. Los lados homólogos de triángulos semejantes son proporcionales.
3. $a^2 = cn$	3.
4. $\triangle ABC \approx \triangle BCD$	4.
5. $\frac{c}{b} = \frac{b}{m}$	5. Los lados homólogos de triángulos semejantes son proporcionales.
6. $b^2 = cm$	6.
7. $a^2 + b^2 = cn + cm$	7. Dos igualdades (3 y 6) pueden sumarse miembro a miembro.
8. $a^2 + b^2 = c(n + m)$	8.
9. $\triangle ABC \approx \triangle BCD$	9.
10. $a^2 + b^2 = c^2$	10.

3. Considerando la figura, respondan las preguntas que se plantean.



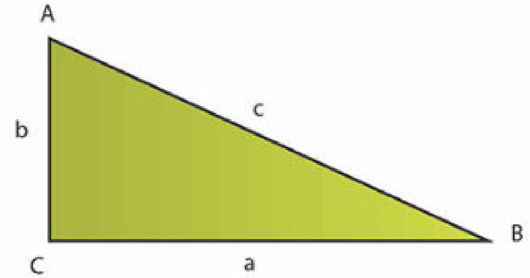
Si $c^2 = a^2 + b^2$

a) ¿Qué tendrían que hacer para determinar el valor de c?

b) ¿Cuál es la expresión que nos permite obtener de manera directa el valor del cateto a?
$a =$

c) ¿Cómo expresarían una fórmula para obtener el valor del cateto b?
$b =$

Como ya sabes, el teorema de Pitágoras dice: en todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.
Guiándote en la siguiente figura, expresa algebraicamente este teorema:

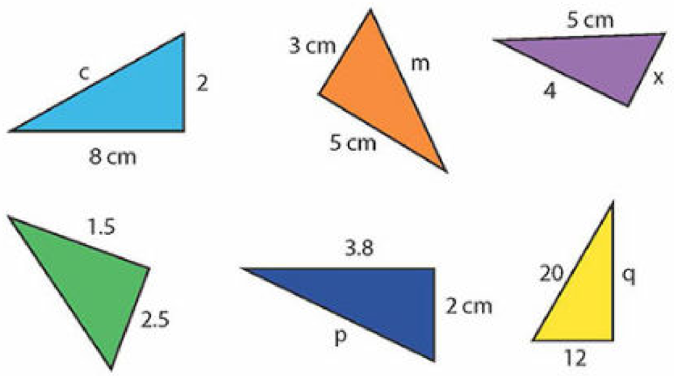


El teorema de Pitágoras es utilizado para resolver todo tipo de problemas que impliquen la resolución de triángulos rectángulos.
Por ejemplo:

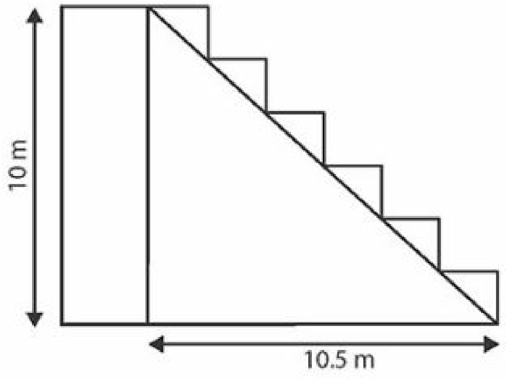
- Galileo Galilei, utilizó el teorema de Pitágoras para determinar la medida de algunas montañas lunares.
- En la arquitectura se utiliza para el diseño de tejados triangulares que llevan un ángulo de 90°. También se usa para conocer la altura de un edificio, sabiendo la medida de la sombra que proyecta y la distancia del punto más alto del edificio al extremo de la sombra.
- En la navegación se utiliza un sistema de triangulación que sirve para localizar un vehículo, transporte o nave espacial.
- Si se desean bajar frutos de un árbol de naranjas y para ello se requiere construir una escalera que permita alcanzarlos es necesario conocer la altura a la que se encuentran los frutos y la distancia del árbol a la base de la escalera.

En tu cuaderno, realiza lo que se solicita.

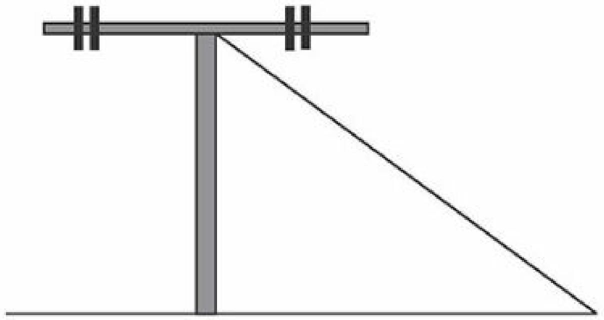
1. Obtén la medida desconocida en cada uno de los siguientes triángulos.



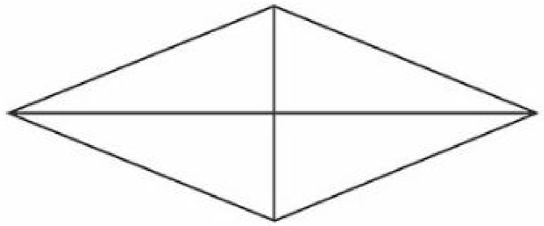
2. Una escalera cuya base se encuentra a una distancia de 10.5 m de la pared donde es recargada, alcanza una altura de 10 m. ¿Cuánto mide la escalera?



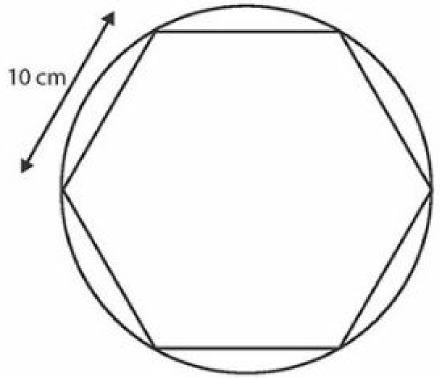
3. Los dueños de una estación de televisión desean colocar una antena de 60 m de altura, por lo que deciden poner tirantes para fijarla mejor. Si las bases para estos están a 45 m del pie de la antena y los tirantes que la van a sostener llegan a la parte más alta de la antena, ¿cuánto deberán medir los tirantes?



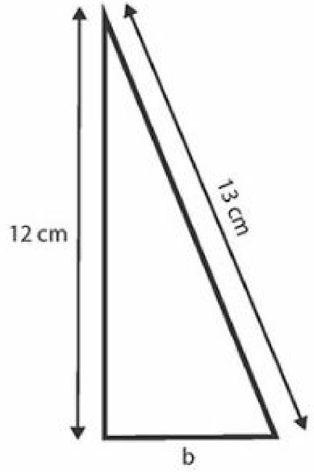
4. Para construir un papalote se tienen dos varas de madera de 30 cm y 40 cm respectivamente. Si se amarran por la mitad formando un ángulo recto y también por los extremos de las varas formando un marco para el papalote, ¿qué cantidad de hilo se necesitará para formar el marco del papalote?



5. Un hexágono de 10 cm de lado está inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 10 cm. ¿Cuánto mide la apotema del polígono?

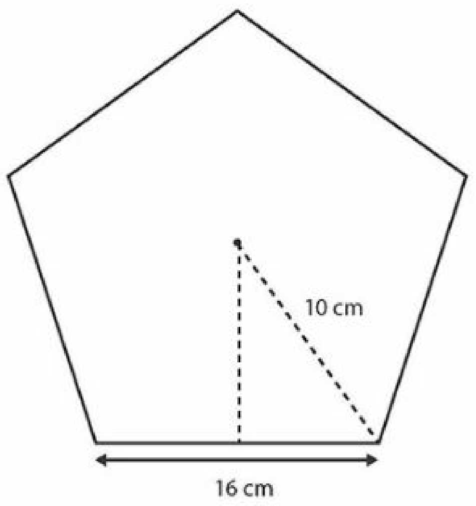


6. ¿Cuánto mide el perímetro de un triángulo rectángulo cuya altura es de 12 cm y su hipotenusa mide 13 cm?



En grupo, revisen sus resultados y procedimientos.

7. ¿Cuál es el área del pentágono que se muestra a continuación?



8. Reúnete con un compañero para jugar “Basta”.

- Cada uno tome su calculadora.
- A la cuenta de 3 empiezan a completar la siguiente tabla.
- El que la complete primero, dirá “¡Basta!” Y el contrincante dejará de escribir.
- El que tenga más aciertos será el ganador de este juego.

Triángulo	A	B	C	D	E	F
Cateto a	6	16		2		12
Cateto b	8		4		7	40
Hipotenusa		30	5	3.7	10	
Perímetro						
Área						

Explora

Después de haber aplicado el teorema de Pitágoras, escribe un método sencillo que te permita resolver problemas como los que se trataron en esta lección.
Desarrolla tus habilidades en el tema de esta lección.
Entra a la página https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf (Consulta: 31 de octubre de 2013).
Analiza y resuelve los reactivos 38 y 39. En grupo verifica tus respuestas.

Nociones de probabilidad

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma)

Lección 19. Regla de la suma de la probabilidad

1. De forma individual, contesta las preguntas.
   Carlos lanza un dado sobre la mesa. Con base en esta información, anota un evento seguro, uno imposible y uno aleatorio.
   ES = { } EI = { } EA = { }
   a) ¿Cuál te fue más difícil elaborar?
      - ¿A qué crees que se debió?
   b) ¿Cuál es el espacio muestral de lanzar un dado?
   c) ¿Qué diferencia hay entre un espacio muestral y un evento?

Por parejas, pónganse de acuerdo y lean en voz alta los enunciados de los eventos que elaboraron, platiquen la razón de encontrar diferentes respuestas en el grupo.

2. En el bloque 1 trabajaron con eventos mutuamente excluyentes. A continuación se enuncian algunos eventos para que determinen cuáles son mutuamente excluyentes anotando (✓) y señalen con (✘) a los que no lo son. En la tabla, “E” denota el experimento, EA es el evento A y EB es el evento B.

a) E = { lanzar una moneda } EA = { que caiga sol } EB = { que caiga águila }	b) E = { tomar al zar una letra de la palabra **A M O R** } EA = { que salga vocal } EB = { que salga una consonante }
c) E = { se lanza un dado } EA = { que caiga un número par } EB = { que caiga un número impar }	d) E = { lanzar un dado } EA = { que salga un número primo } EB = { que salga un número impar }
e) E = { tomar un naipe de la baraja americana } EA = { sacar un naipe con corazones rojos } EB = { sacar un naipe con un número par }	

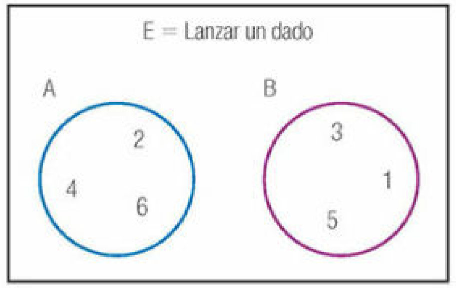
3. En los siguientes eventos, completa las probabilidades que faltan para que la probabilidad total sea 1.
   a) En un juego de futbol de México contra Holanda.
      - ¿Qué probabilidad tiene México de ganar?
      - ¿Qué probabilidad tiene México de **no** ganar?
   b) Sacar un número de un cesto con papelitos numerados con la serie natural del 1 al 20.
      - ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número primo?
      - ¿Cuál es la probabilidad de que **no** salga un número primo?

¿Cómo se llaman este tipo de eventos?

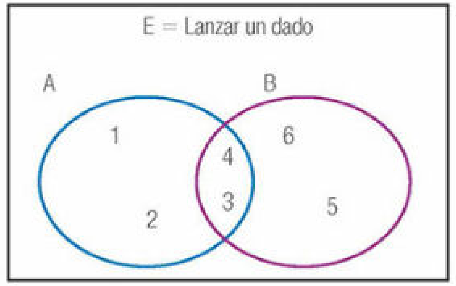
Idea matemática

Recuerda que un **evento** es un subconjunto del espacio muestral de un experimento.
Ejemplo: En el experimento de lanzar un dado, se tiene que el espacio muestral está integrado por los posibles resultados que se pueden obtener, es decir E = {1,2,3,4,5,6}.
Los eventos formados por cada uno de los elementos del espacio muestral se llaman **eventos simples**. En el ejemplo anterior son eventos simples los subconjuntos {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}.

- **Eventos mutuamente excluyentes:** son aquellos donde se tienen dos eventos, A y B, que no pueden ocurrir de manera simultánea. Esto quiere decir que la ocurrencia de un evento necesariamente impide que ocurra el otro evento.
  Ejemplo: Al lanzar un dado, se tienen los eventos:
  A = { caer un número par };
  B = {caer un número impar}.
  En este experimento se tiene que en el dado o se obtiene un número impar o uno par; pero no pueden suceder ambos a la vez.



- **Eventos no excluyentes:** Se denominan así a los eventos A y B cuando sí es posible que ocurran de manera simultánea.
  Ejemplo: Al lanzar un dado, se consideran los eventos:
  A = { que salga un número menor a 5 };
  B = { que salga un número mayor a 2 }.
  En este caso se tiene que al lanzar el dado puede caer 1, 2, 3, 4, 5 o 6; de estos números 1, 2, 3 y 4 son menores que 5, por lo que satisfacen el evento A.
  Por otro lado, 3, 4, 5, 6 son números que cumplen el evento B.
  Observa como los números 3 y 4 forman parte de los resultados favorables para A y para B, de manera que es posible cumplir ambas condiciones al mismo tiempo.



- **Eventos complementarios:** Al considerar los eventos A y B, si se suman sus probabilidades se obtiene 1.
  Ejemplo: En el experimento de lanzar un dado, se tiene que:
  En el evento A = { sacar un número par }, la probabilidad de A es igual a $\frac{1}{2}$, es decir, $P(A) = \frac{1}{2}$

  En el evento B = { obtener un número impar }, la probabilidad de B es igual a $\frac{1}{2}$, lo que se denota por $P(B) = \frac{1}{2}$

  Ahora, si se suman ambas probabilidades se obtiene que $P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- **Eventos independientes:** se les llama así cuando la ocurrencia o no ocurrencia de uno de los dos eventos no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia del otro.
  Ejemplo: Cuando lanzamos una moneda dos veces, el resultado de la segunda tirada no depende de los resultados de la primera.

4. De forma individual, resuelve la siguiente situación.
En una bolsa opaca se introducirán unos papelitos con la siguiente numeración.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

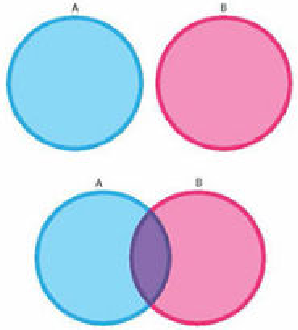
a) ¿Cuál es la probabilidad de que extraigas al azar un papelito menor de 5 o mayor que 8?
   - ¿De qué tipo de evento se trata?
   - ¿Qué dificultad tuviste para determinarlo?

b) ¿Qué sucedería si quisiéramos calcular la probabilidad de obtener un número par o un múltiplo de 3?
   - ¿De qué tipo de evento se trata?

c) ¿Cuál de los dos tipos de eventos se te dificultó más? ¿Por qué?

Idea matemática

Regla de la suma de la probabilidad



Sean A y B dos eventos. La probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos, o ambos, se calcula de la siguiente forma.

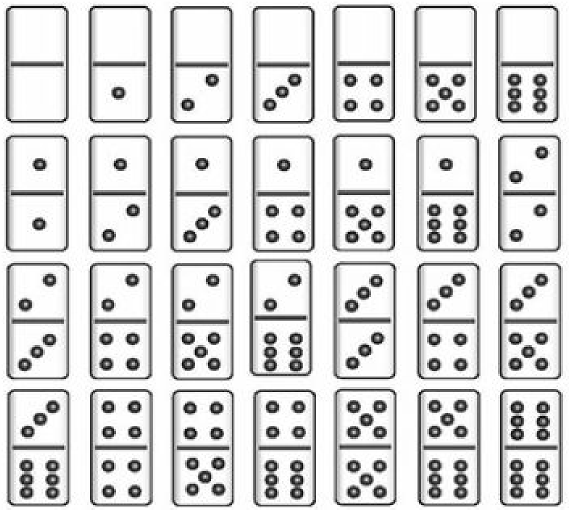
a) Cuando los eventos son mutuamente excluyentes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

b) Cuando los eventos no son excluyentes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. De forma individual, resuelve las siguientes actividades calculando la probabilidad de cada evento.
a) A = {voltear una ficha de dominó y que tenga 9 puntos}
   B = {voltear una ficha de dominó y que sea una mula}



b) A = {sacar una carta de la baraja española y que la figura sea de oros}
B = {sacar una carta de la baraja española y que la figura tenga un número menor que 7}

c) A = {lanzar 2 monedas y que caigan 2 águilas}
B = {lanzar 2 monedas al suelo y que caigan 2 soles}

d) A = En un juego de futbol México contra Brasil que gane México
B = En un juego de futbol México contra Brasil que queden empatados

e) A = sacar una carta de la baraja española y que sea un rey
B = sacar una carta de la baraja española y que sea de bastos

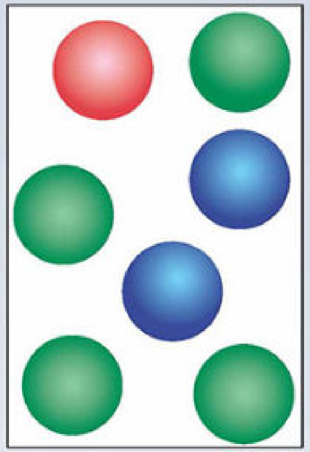
6. Por parejas enuncien un evento mutuamente excluyente y uno no excluyente. Calculen las probabilidades de cada evento que construyeron. Básense en una serie natural del 1 al 25.

Supera el reto

Resuelve los siguientes desafíos.

1. Si se tiran dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea mayor que 6?

2. En una bolsa hay siete canicas, como las mostradas en la imagen.



   a) ¿Cuál es la probabilidad de que, sin ver, se extraiga una canica verde o azul?
      - ¿Qué tipo de evento es?

   b) ¿Cómo puedes relacionar la actividad de las canicas con eventos de días de la semana?

3. Si se tira un dado:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un 3 o un 4?
      - ¿Cómo son los eventos entre ellos?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un número impar o un número mayor que 3?
      - ¿Qué tipo de eventos se tienen?

4. En un grupo, 15 alumnos tienen como preferencia solamente la asignatura de Matemáticas, 20 prefieren solamente Literatura, 25 prefieren Matemáticas y Literatura y 5 no tienen preferencia por ninguna de estas asignaturas. Calcular la probabilidad de que al seleccionar al azar a un alumno del grupo, éste tenga preferencias por Matemáticas o Literatura pero no ambas.

5. Una despensa contiene 8 latas de atún, cinco de rajas y cuatro de chipotles. Por descuido se introducen dos latas cuya fecha de caducidad ya se cumplió. Si se extrae una lata al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de chipotle o una de las caducas?

Explora

Se sugiere trabajar en las direcciones:
http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/2_segundo/2_Matematicas/2m_b04_t04_s01_descartes/doc/info.html
y http://datateca.unad.edu.co/contenidos/100402/moduloexe/leccin_12_axiomas_de_probabilidad__regla_de_la_adicin.html
En estas páginas reforzarás el tema de la lección con actividades diversas y ejercicios resueltos.
Una vez que hayas realizado las actividades, responde la siguiente pregunta: ¿qué aplicaciones darías a la probabilidad en tu vida cotidiana? (Consulta: 23 de enero de 2017).

Lo que aprendí

Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta cuando corresponda.

1. Determina la ecuación cuadrática cuyas soluciones son: $x_1 = -4$ y $x_2 = 5$

   a) $x^2 - x - 20$
   b) $x^2 + x - 20$
   c) $x^2 + x + 20$
   d) $x^2 - x + 20$

2. Establece la ecuación que modele los siguientes problemas. Resuelve por factorización.

   a) Un triángulo tiene un área de 24 cm^2 y su altura mide 2 cm más que la base correspondiente. ¿Cuál es la medida de la altura?

   Ecuación: ______________________________

   Medida de la altura: ______________________________

   b) Un terreno rectangular tiene un área de 60 m^2. Calcula las dimensiones del terreno si se sabe que el ancho del terreno es 7 m más pequeño que su largo.

3. Determina por factorización las raíces de la ecuación cuadrática: $x^2 - 14x + 48 = 0$

   a) $x_1 = -6$, $x - 2 = -8$
   b) $x_1 = -12$, $x_2 = -2$
   c) $x_1 = 6$, $x_2 = -8$
   d) $x_1 = 6$, $x_2 = 8$

4. En cada figura se ha aplicado una rotación, ubica el centro de rotación.

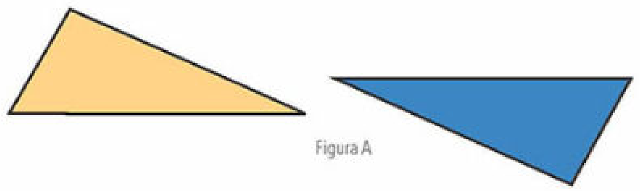


Figura A

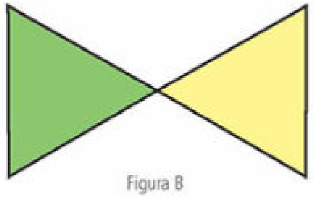


Figura B

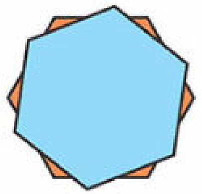
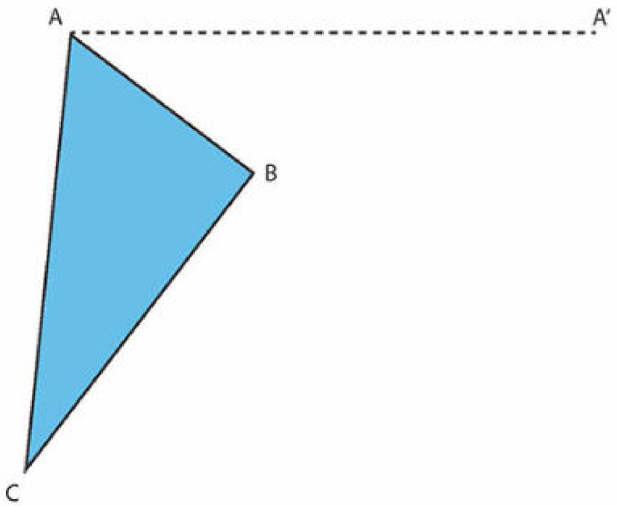
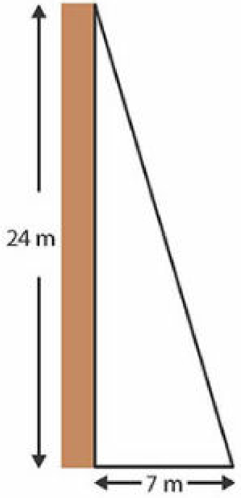


Figura C

5. Utiliza un juego de geometría y realiza la traslación correspondiente a esta figura.



6. Un cable baja de un poste que tiene una altura de 24 m y se fija sobre el piso a una distancia de 7 m de la base del poste. ¿Cuál es la extensión que alcanza el cable?



   a) 625 m
   b) 23 m
   c) 31 m
   d) 25 m

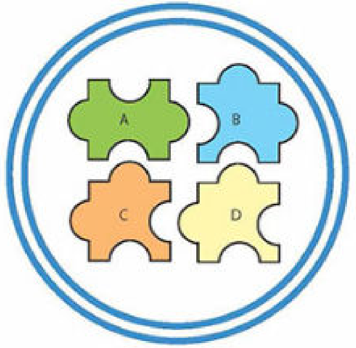
7. ¿Cuánto mide cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles cuya altura mide 7 cm?

8. En una rifa participan los números del 3 al 100. ¿Cuál es la probabilidad de que gane un múltiplo de 2?

Mi prueba PISA

Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta cuando corresponda.

1. Observa la imagen y elige la pareja de figuras en las que se aplicó una rotación:



A) B y C B) A y C C) B y A D) C y D

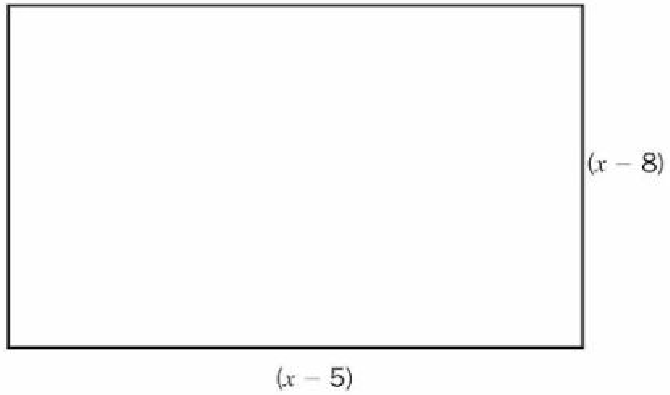
2. Determina las dimensiones de un terreno rectangular, si se sabe que la longitud del ancho es 3 m menor que la longitud del largo y su área es igual a 54 m².

A) 9 m y 6 m B) 9 m y 6 m C) 9 m y 3 m D) 9 m y 3 m

3. Determina los valores que satisfacen la ecuación $x^2 - 16x + 63 = 0$.

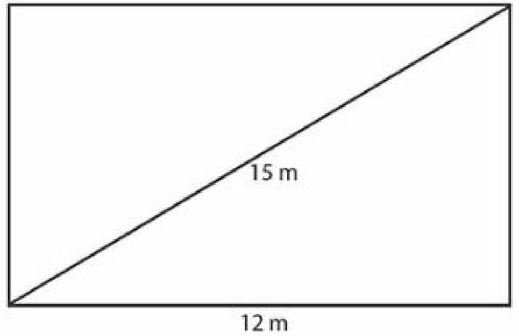
A) 7 y 9 B)-9 y –7 C) –9 y 7 D) 9 y –7

4. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del terreno rectangular que se muestra en la figura?



A) $x^2 - 40x + 13$ B) $x^2 - 13x - 40$ C) $x^2 - 13x + 25$ D) $x^2 - 13x + 40$

5. ¿Cuál es el área de la cancha rectangular que se muestra en la figura?

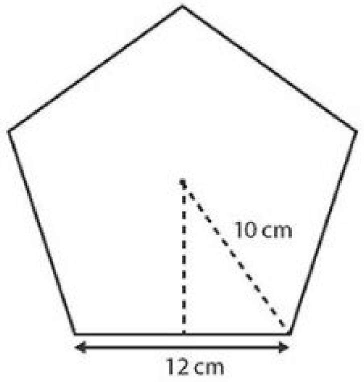


A) 135 m² B) 108 m² C) 118 m² D) 180 m²

6. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm, ¿cuánto mide el otro cateto?

A) 1 cm B) 3 cm C) 5 cm D) 9 cm

7. ¿Cuál es la medida de la apotema del pentágono que se muestra a continuación?



A) 5 cm B) 6 cm C) 7 cm D) 8 cm

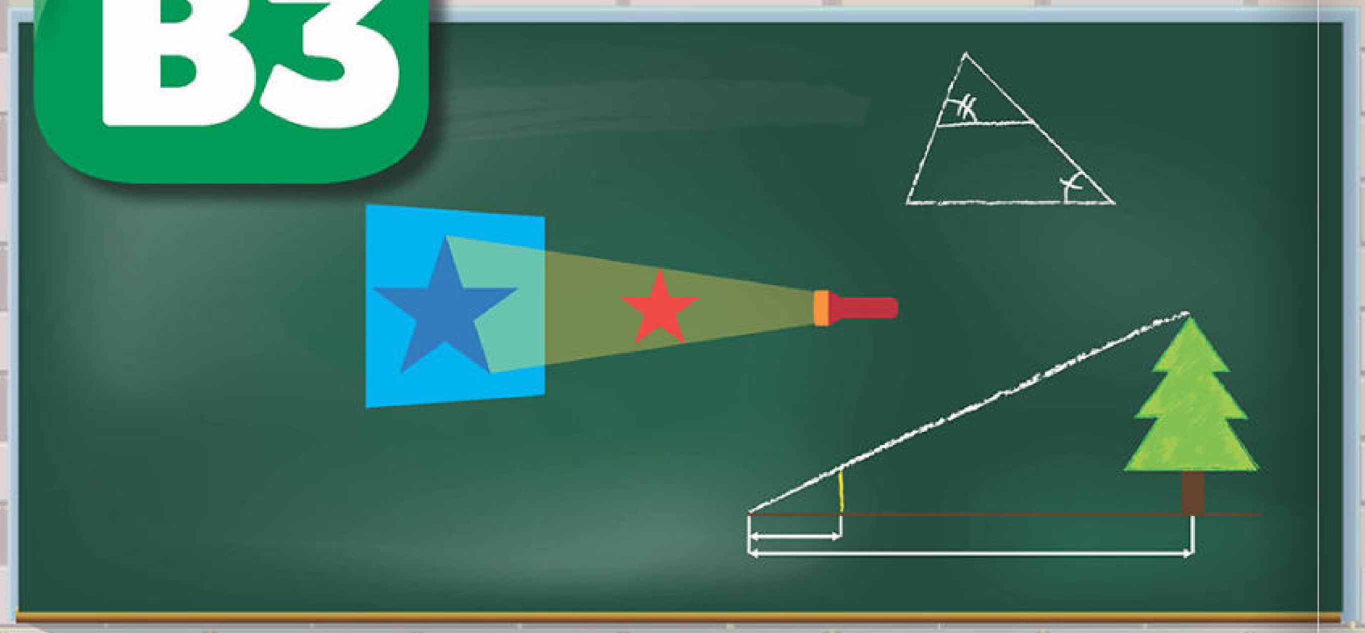
8. En el experimento de lanzar 2 dados, se consideran los siguientes eventos:

A = {que la suma sea mayor o igual a 6}
B = {que la suma sea menor o igual a 4}

¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un resultado del evento A o uno del evento B?

A) $\frac{8}{36}$ B) $\frac{21}{36}$ C) $\frac{31}{36}$ D) $\frac{4}{9}$

B3



Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican ecuaciones de segundo grado
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura

Evaluación diagnóstica

Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta cuando corresponda.

1. ¿Cuál es la raíz cuadrada de x^2?

   a) x b) $-x$ c) $x, -x$ d) 2

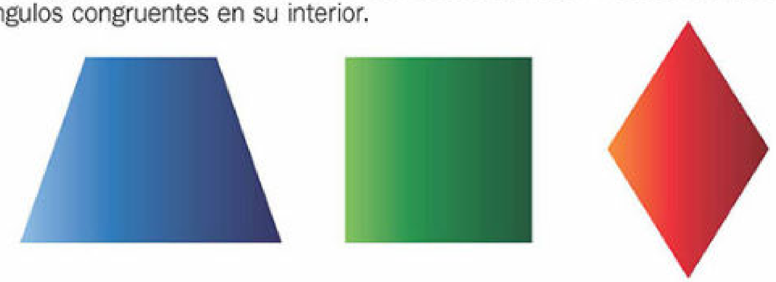
2. ¿Qué valor tiene el coeficiente a, del término cuadrático en la ecuación $6x - 4x^2 - 2 = 0$?

   a) −4 b) 6 c) 4 d) −2

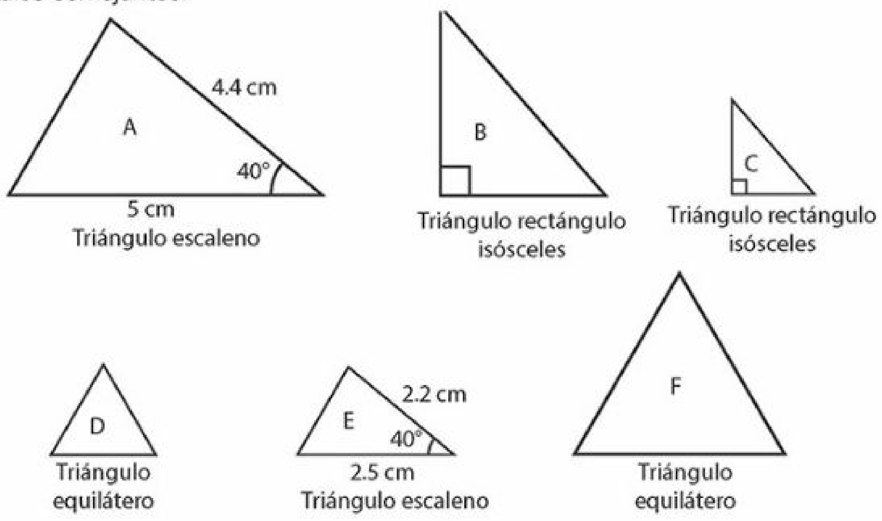
3. ¿Cuántas raíces o soluciones tiene una ecuación cuadrática?

   a) una b) dos c) cuatro d) cero

4. En los siguientes cuadriláteros traza las rectas que sean necesarias para obtener triángulos congruentes en su interior.

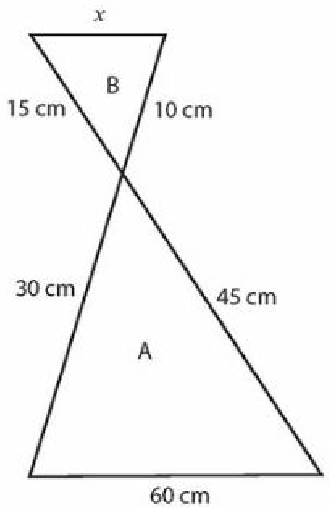


5. Considerando los datos proporcionados, determina cuáles son las parejas de triángulos semejantes.

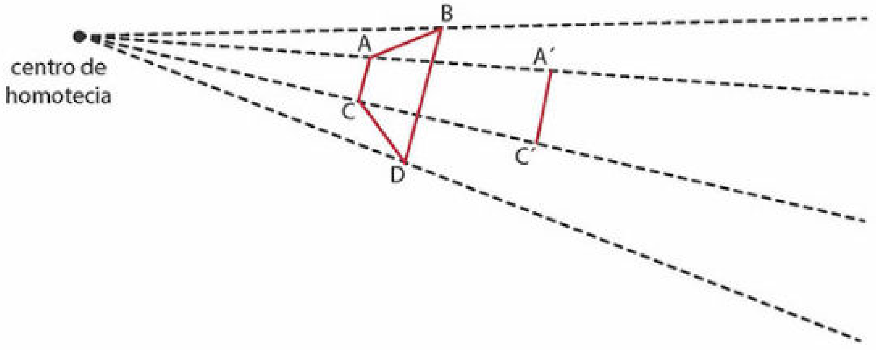


$\triangle A \sim \triangle$ ____, $\triangle B \sim \triangle$ ____, $\triangle F \sim \triangle$ ____

6. La siguiente figura representa el diseño de un jardín con dos secciones A y B. Si se quiere hacer que la sección B esté en proporción a la sección A, como se muestra a continuación, ¿cuál es el valor de x?



7. Completa los trazos de la figura. ¿Qué figura obtuviste? ¿Cómo son las figuras que obtuviste?



8. Se tienen en papelitos cerrados al azar los números del 2 al 6; todas las opciones tienen la misma probabilidad de salir excepto:

   a) Que salga un número par b) Que salga un número primo

   c) Que salga un múltiplo de 2 d) Que salga un número impar

Patrones y ecuaciones

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

Lección 20. Ecuaciones cuadráticas II

¿Cuáles son las formas de resolver ecuaciones cuadráticas que conoces hasta ahora?

1. Comenta con un compañero si consideran que sería fácil deducir una fórmula que permita resolver cualquier ecuación de segundo grado con una incógnita, como las que has resuelto por otros métodos hasta ahora.
2. Completen por parejas la siguiente tabla para despejar x:

Forma general de la ecuación completa de segundo grado	
Pasar c al otro lado de la igualdad	
Multiplicar por $4a$ todos los términos de la ecuación	
Sumar b^2 a los dos miembros de la ecuación	
Factorizando el trinomio cuadrado perfecto que se formó en el primer miembro de la ecuación, se obtiene	$(2ax + b)^2 = -4ac + b^2$
Aplicar raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación	
Simplificar la raíz y el cuadrado del primer miembro de la ecuación	
Pasar b al segundo miembro de la ecuación	
Finalmente, despejar x	

Si se completó correctamente la tabla, llegaron a la siguiente fórmula (de lo contrario, revisen los pasos anteriores):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pero, ¿cuántas raíces o soluciones tiene una ecuación cuadrática? Para encontrar la segunda solución de la ecuación se toma el signo negativo que antecede a la raíz; recuerden sus lecciones anteriores: toda raíz cuadrada tiene dos signos, uno positivo y uno negativo.

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Idea matemática

La expresión que obtuvieron se llama fórmula general porque permite resolver cualquier ecuación de segundo grado, ya sea completa o incompleta. Se expresa como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Comenta con un compañero, ¿de dónde creen que se obtengan los valores de las letras que tienen que sustituir? Por ejemplo, si tienen la ecuación $2x^2 + 7x - 4 = 0$.
   a) ¿Cuánto vale a?, ¿y b?
   b) Finalmente, ¿cuánto vale c?
4. Completen en la fórmula general la sustitución correspondiente.

$$x = \frac{-\_\_ + \sqrt{7^2 - 4(\_\_)(\_\_)}}{2(\_\_)}$$

   a) ¿Cuál es el valor de la primera solución, es decir x_1 de la ecuación?
   b) Para determinar el valor x_2 ¿qué es lo que va a variar en la fórmula general?
   c) ¿Cuál es el valor de x_2?

Idea matemática

Antes de aplicar la fórmula general es necesario transformar las ecuaciones a la forma general de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, para identificar los coeficientes a, b, y c y sustituirlos en ella.

Supera el reto

1. Transforma las siguientes ecuaciones a la forma general de la ecuación cuadrática.

a) $60 - 4x = x^2$	b) $x(x + 2) = 480$
c) $\frac{x^3}{x} - \frac{5x^2}{x} = 6$	d) $\frac{x^2 + 7}{x} = -2$

2. Con la finalidad de que apliques lo aprendido, resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por fórmula general en tu cuaderno. Recuerda identificar primero los coeficientes a, b y c.

a) $x^2 - 10x - 39 = 0$ a = ____ b = ____ c = ____ x_1 = ____ x_2 = ____	b) $x^2 + 7x = 18$ a = ____ b = ____ c = ____ x_1 = ____ x_2 = ____
c) $3x^2 + 30 + 21x = 0$ a = ____ b = ____ c = ____ x_1 = ____ x_2 = ____	d) $6x^2 - 17x + 10 = 0$ a = ____ b = ____ c = ____ x_1 = ____ x_2 = ____
e) $2x^2 - 2 = 0$ a = ____ b = ____ c = ____ x_1 = ____ x_2 = ____	f) $4x^2 + 12x = 40$ a = ____ b = ____ c = ____ x_1 = ____ x_2 = ____
g) $4x + 8x^2 = 1.5$ a = ____ b = ____ c = ____ x_1 = ____ x_2 = ____	h) $x^2 -16 = 0$ a = ____ b = ____ c = ____ x_1 = ____ x_2 = ____

3. Organizados en parejas, establezcan en cada caso la ecuación cuadrática que tenga como raíces o soluciones los resultados que se mencionan. Los coeficientes están desordenados, así que tendrán que acomodarlos y comprobar si la ecuación que plantearon es correcta, resolviéndola por fórmula general.

Soluciones	Coeficientes	Ecuación
$x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = 3$	−7, 2, 3	
$x_1 = \frac{3}{5}$ $x_2 = -1.5$	9, 10, −9	

a) ¿En una ecuación cuadrática el coeficiente puede valer 0?, ¿por qué?
b) ¿Cualquier ecuación cuadrática se puede resolver por fórmula general?
   - Justifiquen su respuesta.
c) Escriban una ventaja de utilizar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

4. Analicen los siguientes casos y contesten las preguntas.

a) En su cuaderno, sustituyan en la fórmula general los coeficientes de la ecuación cuadrática $3x^2 + 7x - 28 = 0$.
   - ¿Cuál es el resultado de hacer la operación que está dentro de la raíz?
   - ¿Este número es mayor, menor o igual a cero?

b) En la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$, ¿cuál es el resultado de hacer la operación que está dentro de la raíz? ¿Este número es mayor, menor o igual a cero?

c) A partir de los ejemplos anteriores, ¿qué caso faltaría que ocurriera con el resultado que se obtiene dentro de la raíz, que el número fuera mayor, menor o igual a cero?

Comenten en forma grupal y con ayuda del profesor, ¿para qué sería importante saber el resultado de lo que está dentro de la raíz en la fórmula general?

Idea matemática

En la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, los términos que están dentro de la raíz cuadrada $(b^2 - 4ac)$ reciben el nombre de discriminante.
El discriminante es importante porque indica el número y el tipo de soluciones que tiene la ecuación cuadrática.

1. Resuelvan en su cuaderno, por fórmula general, las dos ecuaciones cuadráticas del ejercicio 4 de supera el reto. Respondan.

a) ¿Los valores de x_1 y x_2 de la primera ecuación son iguales o diferentes?

b) En la ecuación cuyo discriminante es igual a cero, ¿las soluciones de la ecuación son iguales o diferentes?

Para formalizar su conocimiento, completen la tabla de acuerdo con las respuestas anteriores:

Discriminante	Tipo de raíces
$(b^2 - 4ac)$ ________ 0	Dos raíces reales y ________ entre sí.
$(b^2 - 4ac)$ ________ 0	Dos raíces reales, las cuales son ________ entre sí.
$(b^2 - 4ac)$ ________ 0	No tiene raíces reales

2. Determinen el valor del discriminante en su cuaderno e indiquen qué tipo de raíces tendrá cada ecuación.

Ecuación	Valor del discriminante	Tipo de soluciones
$x^2 - 10x + 25 = 0$		
$3x^2 - 2x + 5 = 0$		
$5x^2 - 11x - 12 = 0$		

a) ¿Cuál consideran que es el mayor beneficio de conocer el valor del discriminante?

3. Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas usando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

a) ¿Cuál es el número cuyo quíntuplo aumentado en 6 unidades es igual a su cuadrado?

Ecuación ________________
Solución ________________

b) El largo de una habitación excede 1 m a su ancho. Si se amplía 2 m más por lado, se tendrá un área de 24.75 m^2. Determina:

Ecuación = ____________________

Ancho inicial = ____________________

Largo inicial = ____________________

Área = ____________________

c) ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar el cuadrado de ella?

Ecuación = ____________________

Solución = ____________________

d) La suma de dos números es 26 y su producto es 165, ¿cuáles son esos números?

Ecuación = ____________________

Primer número = ____________________

Segundo número = ____________________

e) ¿Cuáles son las edades de Juan y de su hermana menor Luisa, si la suma de sus edades es 23 y la suma de sus cuadrados es 289?

Ecuación = ____________________

Edad de Juan = ____________________

Edad de Luisa = ____________________

- Comparen sus formulaciones con un compañero e interpreten las ecuaciones que establecieron.

4. Ahora, verifiquen que estén correctamente planteadas y resuélvanlas por factorización.

¿Cómo son los resultados obtenidos por fórmula general en comparación con los de factorización?

Idea matemática

Como se mencionó anteriormente, al calcular el valor del discriminante, se puede reconocer el número y tipo de soluciones de una ecuación cuadrática. Cabe destacar que cuando las soluciones que se obtienen son dos iguales reciben el nombre de raíces dobles. Cuando el discriminante es menor a cero, se dice que las dos raíces nos son números reales.

Supera el reto

Reúnanse en parejas, lean con atención los problemas y comenten el procedimiento para resolverlos. Posteriormente, represéntenlos gráficamente en su cuaderno y resuélvanlos por fórmula general.

1. En un parque en forma de cuadrado que mide 120 m por lado, se construirán dos andadores de ancho x y largo de 120 m, de tal manera que formen una cruz que esté en el centro del terreno. ¿Cuál debe ser el valor de x para que la superficie de los andadores sea igual a la superficie total de áreas verdes que queda después de la construcción?

   a) Escribe la ecuación correspondiente al problema.
   b) Escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
   c) ¿Cuál es el valor de x?
   d) ¿Consideran que simplifica los cálculos resolver la ecuación por fórmula general? ¿Por qué?

Comenten con otra pareja la forma en la que representaron gráficamente el problema y lo resolvieron. Comparen y argumenten sus respuestas.

2. Calculen la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números pares consecutivos.

   a) Escriban la ecuación cuadrática correspondiente al problema.
   b) ¿Cuántos valores para la medida de la hipotenusa son válidos? ¿Por qué?
   c) Determinen las longitudes de los catetos.
   d) ¿Cuál es el área del triángulo rectángulo?

Con ayuda de su profesor, concluyan el procedimiento que se usa para obtener las raíces de una ecuación y cuál sería el procedimiento para la ecuación cuadrática conociendo sus raíces. Redáctenlos en su cuaderno.

¿Qué habilidades consideras que desarrollaste en esta lección? ¿Por qué?

Explora

Para que refuerces los conocimientos adquiridos en la lección, entra al siguiente sitio electrónico; plantea las ecuaciones que modelan los problemas propuestos y resuélvelos por el método de fórmula general en tu cuaderno. Comenta la experiencia con un compañero y compartan los resultados.
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/ecuacion.htm#4
(Consulta: 10 de marzo de 2013).

Figuras y cuerpos

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas

Lección 21. Congruencia de triángulos

Organizados en equipos resuelvan el siguiente problema.

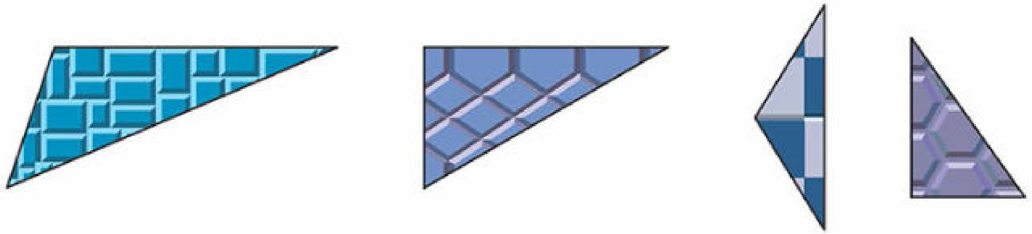
1. Los dueños de una fábrica de mosaicos saben que para cubrir mejor los pisos sin que se desperdicie material, los mejores diseños son los que tienen forma de cuadriláteros. Los fabricantes quieren revolucionar el diseño de los mosaicos utilizando triángulos, con la condición de que éstos formen cuadriláteros para seguir ahorrando mosaicos, ¿qué condiciones deben cumplir los triángulos para que al colocarlos, la unión entre ellos resulte la diagonal del cuadrilátero, y además sean dos triángulos congruentes?

Supera el reto

Por parejas y en sus cuadernos, dibujen sus propios mosaicos y contesten las preguntas. Al terminar validen las respuestas y los dibujos de los mosaicos con su profesor.

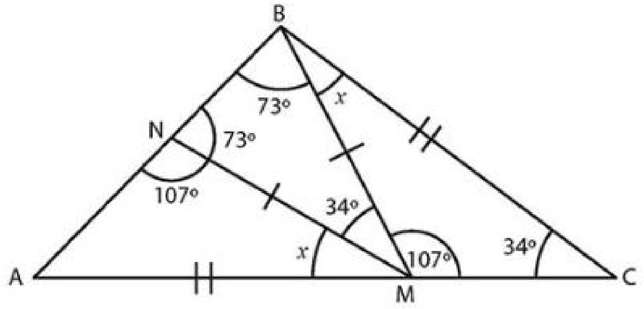
- ¿Qué cuadriláteros formaron?
- ¿Cuántos diferentes mosaicos diseñaron?
- ¿Qué triángulos utilizaron?
- ¿Cómo pueden afirmar que los triángulos que utilizaron para diseñar sus mosaicos son congruentes?
- ¿Cuál o cuáles criterios de congruencia utilizarían para justificar sus respuestas?
- Comparen los triángulos que diseñaron los otros equipos y que cuadriláteros se formaron. ¿Son iguales a los que ustedes trazaron? ¿Cómo pueden asegurar que son los mismos o diferentes?

2. Algunos de los diseños de mosaico de la fábrica son los siguientes. Individualmente, traza en tu cuaderno los triángulos respectivos para formar los cuadriláteros.



a) ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los triángulos que trazaste para ser congruentes al mosaico diseñado por la fábrica?
b) ¿Qué cuadriláteros se formaron?

3. Observa la siguiente composición de triángulos, ¿cuáles de los triángulos son congruentes? Justifica tu respuesta.



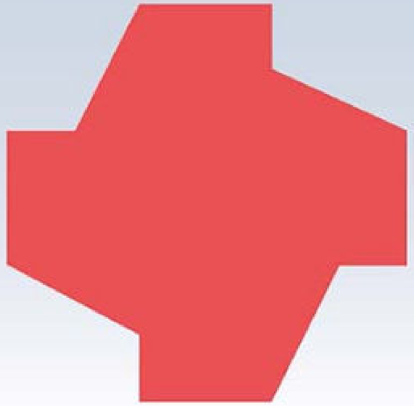
4. Los lados del triángulo ABC miden $\overline{AB} = 4x + 3$, $\overline{BC} = 8x - 4$ y $\overline{CA} = 10x - 1$, y los del triángulo RST miden $\overline{RS} = 6x - 3$, $\overline{ST} = 7x - 1$ y $\overline{TR} = 8x + 1$; si se sabe que tienen el mismo perímetro, entonces:

   a) ¿Los triángulos ABC y RST son congruentes? Justifiquen su respuesta.
   b) ¿Todos los triángulos de igual perímetro son congruentes?

Con ayuda de su profesor y en forma grupal comparen sus resultados.
Reúnete con un compañero y comenten en qué otras situaciones se puede utilizar la congruencia de triángulos.

Supera el reto

Traza las líneas necesarias para que el dodecágono pueda ser dividido en triángulos y cuadriláteros congruentes. Justifica tu respuesta.



Explora

Resuelve los problemas de la siguiente página en los que se involucran los criterios de congruencia y semejanza de triángulos: https://www.thatquiz.org/es/previewtest?Z/2/B/H/1VKZ1425488167 (Consulta: 23 de enero de 2017).

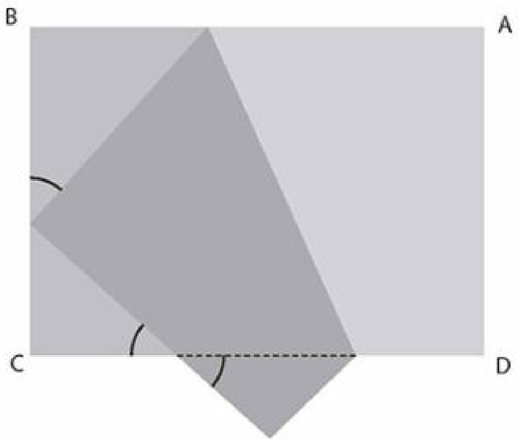
Figuras y cuerpos

Lección 22. Semejanza de triángulos

Organizados en equipos resuelvan los siguientes problemas.

1. Determinen en cada caso si se trata o no de triángulos semejantes, argumenten su respuesta.

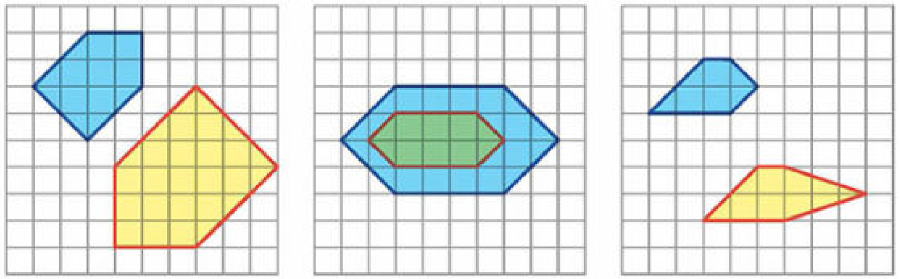
   a) Al doblar una hoja tamaño carta, como se observa en la figura, se obtienen tres triángulos; ¿son triángulos semejantes?



   b) Un triángulo de lados 3, 6 y 9 cm, ¿puede ser semejante con otro cuyos lados miden 9, 36 y 81 cm?

   c) Un triángulo con un ángulo de 30° y otro de 40°, ¿es forzosamente semejante a otro triángulo con un ángulo de 30° y otro de 110°?

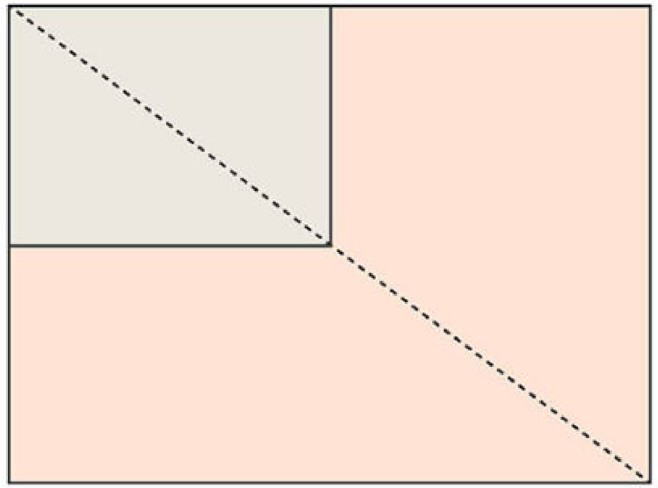
2. Indiquen qué parejas de figuras son semejantes.



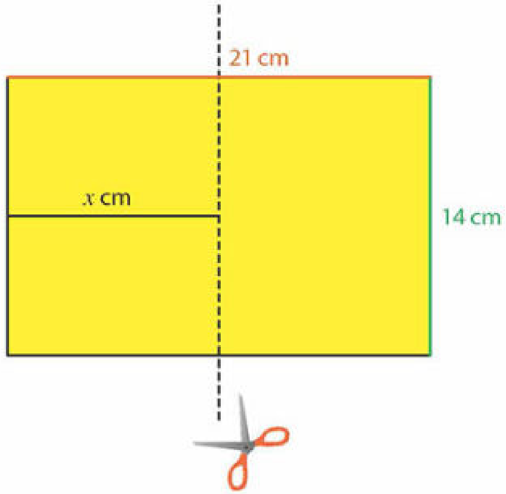
3. Dos polígonos regulares con el mismo número de lados, ¿pueden ser semejantes?

4. Reúnete con un compañero y contesten lo que se pide.

   a) Tracen la diagonal a una hoja tamaño carta, desde el punto medio de esta línea formen líneas perpendiculares a los bordes de la hoja. Deduzcan si el rectángulo es semejante con la hoja tamaño carta.



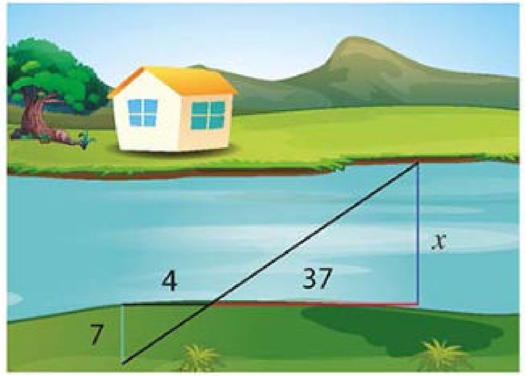
   - ¿Por dónde se ha de cortar una hoja para que el trozo de la izquierda sea semejante a la hoja entera?



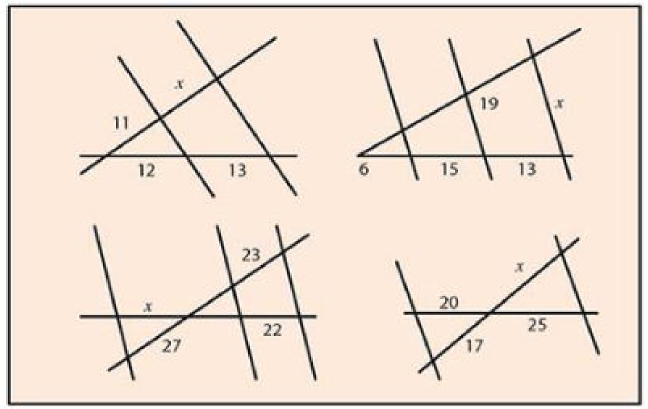
5. Cada uno dibuje en su cuaderno un triángulo con un ángulo de 69º y uno de los lados que lo forman de 9 cm. ¿Son semejantes los triángulos que trazaron? ¿Todos los triángulos que cumplan estas condiciones son semejantes?

6. Ahora, traza en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 56º y el cociente de los lados que lo forman igual a 3. ¿Son semejantes los triángulos que trazó cada uno?, ¿son semejantes todos los triángulos que cumplen estas condiciones?

7. Observen la imagen y calculen el ancho del río.

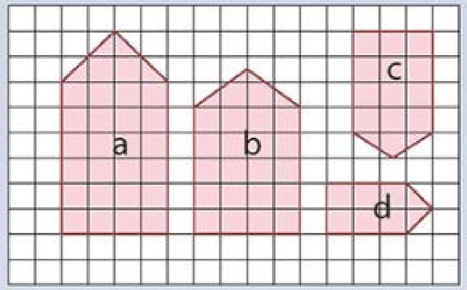


8. Calculen, en cada caso el valor de x.



Supera el reto

Indica cuáles de los siguientes pentágonos son semejantes, justifica tu respuesta.



Explora

Visita el sitio: http://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas2/semejanzatriangulos?page=0%2C2

Resuelve los problemas sobre semejanza de triángulos que se presentan . Verifica que cuentas con el software adecuado para realizar la actividad. (Consulta: 23 de enero de 2017).

Figuras y cuerpos

Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales

Lección 23. Teorema de Tales I

¿Sabes quién fue Tales de Mileto?

Al parecer vivió en Grecia alrededor del año 600 a.n.e. Matemático, astrónomo, filósofo; fue el primero de los griegos que estudió las matemáticas y las otras ciencias conexas con un interés puramente científico, se dice que predijo el eclipse solar del año 585 a.n.e. Se cuentan muchas anécdotas de Tales y según Plutarco, era el típico sabio distraído, concentrado sólo en sus investigaciones astronómicas, fue el famoso sabio que cayó en un pozo por mirar las estrellas y una anciana le dijo: "pretendes observar las estrellas y ni siquiera ves lo que tienes a tus pies".

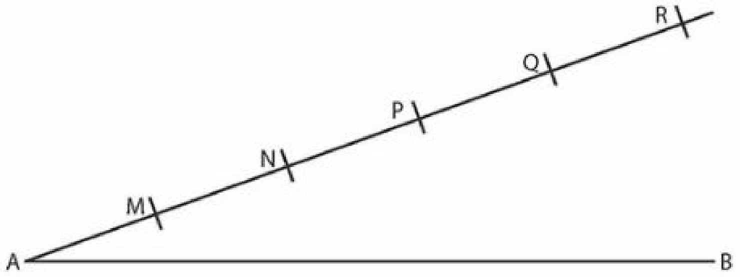
¿Sabes por qué el teorema de Tales se considera una de sus grandes aportaciones a las matemáticas? Para averiguarlo, resuelve las actividades propuestas en esta lección.

1. Reúnete con un compañero. Trabajen en su cuaderno las respuestas y después valídenlas con su profesor.

   a) Sin medir, dividan el siguiente segmento en cinco partes y describan lo que hicieron para efectuar dicha división.

   - ¿Fue fácil realizar la división del segmento?
   - ¿Cuál fue el procedimiento que siguieron?
   - ¿Cómo son esas partes entre sí?

   b) Observen la figura y contesten lo que se pide.

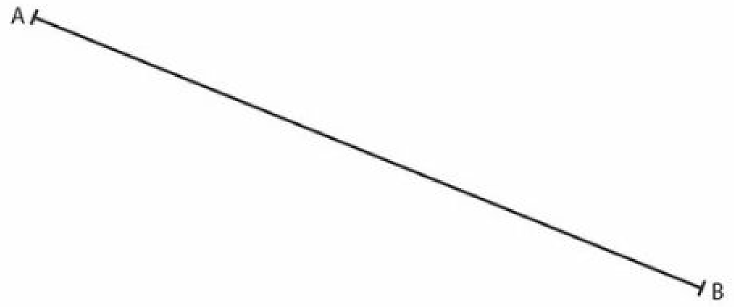


   - ¿Cómo son los segmentos MN y NP?
   - ¿Cómo son los segmentos AM y MN?
   - Entonces los segmentos AM, MN y NP son:

c) En la figura anterior traza una recta que una los puntos B y R. Enseguida, traza rectas paralelas a $\overline{BR}$ que corten $\overline{AB}$ y que pasen por M, N, P, Q y R, respectivamente. Marca las intersecciones, con M', N', P', Q' y R'. ¿Cómo resultan $\overline{A'M'}$, $\overline{M'N'}$, $\overline{N'P'}$?
d) Entonces, podemos afirmar que rectas paralelas que cortan una transversal dividida en segmentos iguales determinan sobre otra también segmentos iguales. ¿Consideras esta afirmación cierta? Justifica tu respuesta.
e) ¿Este procedimiento se parece al que realizaron para dividir el segmento AB?

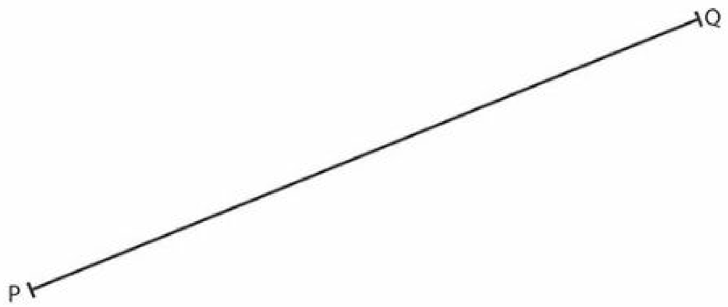
2. De forma individual, realiza en cada caso la división que se indica.

a) Divide el segmento AB en nueve partes iguales.

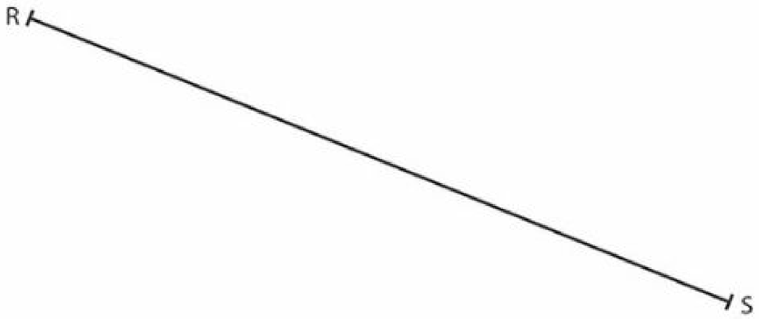


b) Divide el segmento MN en cinco partes iguales.

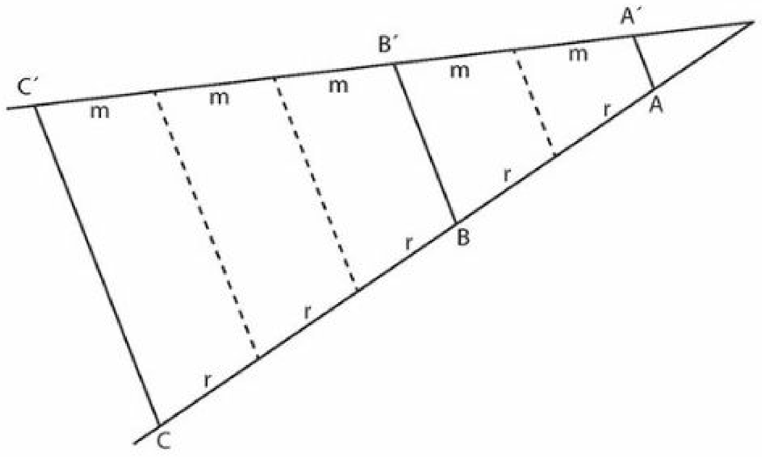
c) Divide el segmento PQ en seis partes iguales.



d) Divide el segmento RS en siete partes iguales.



3. Comenta con tus compañeros la siguiente información y respondan las preguntas. Si varias rectas paralelas son cortadas por dos o más transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra.



a) ¿Cómo son los segmentos r, comprendidos entre A y C?
b) ¿Cuántas divisiones iguales hay entre A y B?
c) ¿Cuántas divisiones iguales hay entre B y C?
d) Busca la razón de los segmentos AB y BC.
e) Determina la razón entre los segmentos A'B' y B'C'.
f) ¿Cómo resultaron las razones de los segmentos AB y BC en relación con los segmentos A'B' y B'C'?
g) ¿Qué proporción pueden formar con la información anterior?

Observa que lo anterior nos indica que los segmentos homólogos son proporcionales.

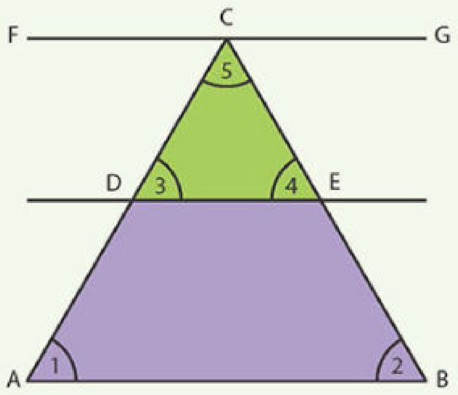
Con las deducciones anteriores podemos demostrar el teorema que dice: "Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo, forma otro triángulo semejante al primero".

4. Copia en tu cuaderno el siguiente cuadro y complétalo.

$\overline{AB} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{FG}$

La base del △ ABC es ________________.

La base del △ CDE ________________.



$\overline{BA}$ y __________ son paralelas.

Observa al △ ABC y el △ CDE:

- El ángulo 1 y el __________ son congruentes por ser ángulos correspondientes formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal.
- El ángulo 2 y el ángulo 4 son _____ por ser ángulos __________ formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal.
- El ángulo 5 es común a los triángulos ABC y CDE.
- De lo anterior podemos afirmar que los ángulos homólogos son ________________.

además $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$ ya que si varias paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos homólogos son ________________

Mide los lados de los △ ABC y △ DEC.

¿Cuál es la razón de semejanza de $\frac{AC}{DC} =$

¿Cuál es la razón de semejanza de $\frac{BC}{CE} =$

¿Cuál es la razón de semejanza de $\frac{AB}{DE} =$

De esta manera, los lados homólogos son ________________

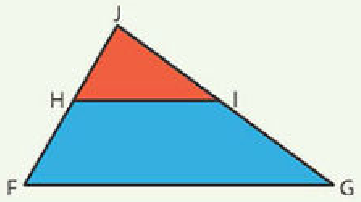
Si los triángulos ABC y CDE tienen sus ángulos homólogos congruentes y sus lados homólogos proporcionales, significa que estos triángulos son ________________

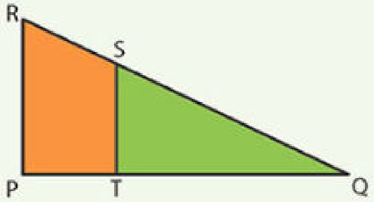
Tomando en cuenta el razonamiento anterior, podemos asegurar que:

"Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo forma otro triángulo semejante al primero".

Ejemplos

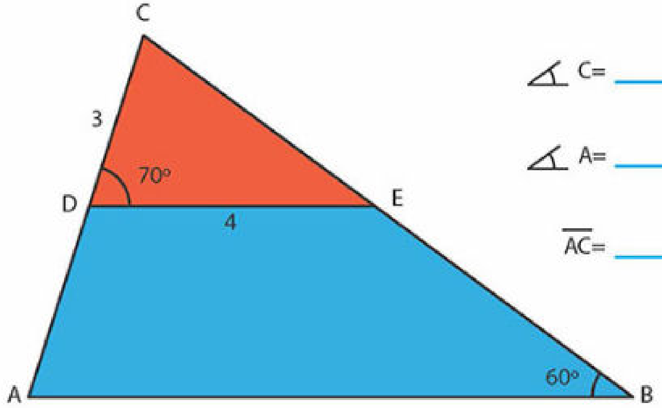
- Si $\overline{FG} \parallel \overline{HI}$ entonces △FGJ ~ △HIJ
- Si $\overline{PR} \parallel \overline{ST}$ entonces △PQR ~ △TQS





5. Individualmente, calcula los valores que se te indican.

a) Si $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AB} = 8$ entonces:

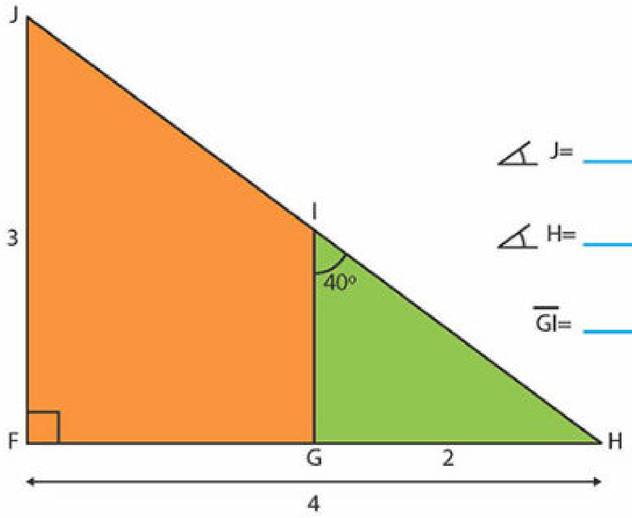


∡ C= _____

∡ A= _____

$\overline{AC}$= _____

b) Si $\overline{GI} \parallel \overline{FJ}$ y $\overline{FJ} \perp \overline{FH}$, entonces:

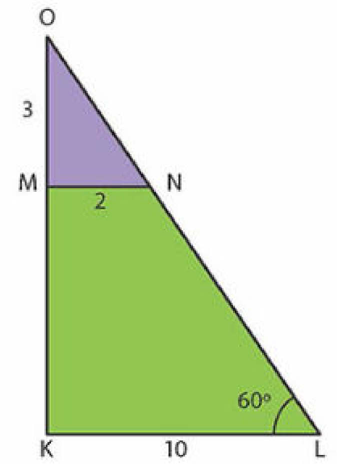


∡ J= _____

∡ H= _____

$\overline{GI}$= _____

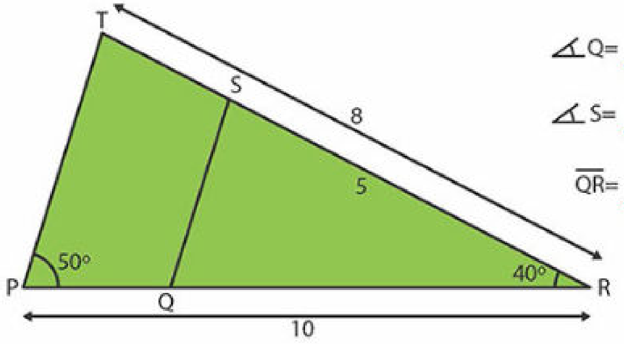
$\overline{KL} \parallel \overline{MN}$ y $\overline{KL} \perp \overline{KO}$



∡ O= ______

$\overline{KO}$= ______

$\overline{PT} \parallel \overline{QS}$ y $\overline{PT} \perp \overline{TR}$



∡ Q= ______

∡ S= ______

$\overline{QR}$= ______

- ¿Qué hiciste para conocer los resultados?
- ¿Encontraste alguna dificultad al resolver este ejercicio? ¿cuál?

Supera el reto

Una fotografía mide 12 cm de ancho por 10 cm de altura. Un cliente pide una ampliación de 20 cm por 16 cm, ¿será posible realizarla?

¿Qué ancho deberá tener la ampliación si se requiere que mida 22.5 cm de largo?

Figuras y cuerpos

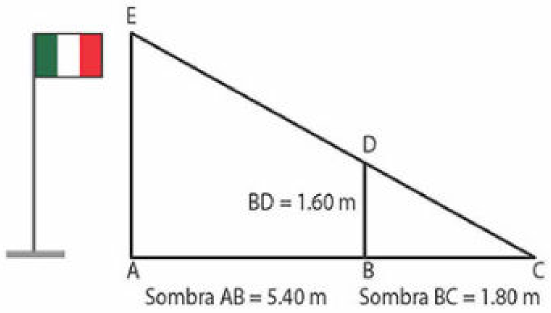
Lección 24. Teorema de Tales II

De la vida de Tales de Mileto no se conocen muchas cosas, pero hay testimonios indiscutibles según los cuales el sabio Mileto era considerado un gran genio desde joven. Se cuenta que siendo aún niño, en compañía de los grandes sacerdotes egipcios, pudo ver de cerca la gran pirámide de Keops. “¿Qué altura piensas que tiene?” le preguntó uno de los sacerdotes. Tales, después de un momento respondió que podía valorarla a ojo, pero que no le gustaba “disparar” cifras sin ton ni son. Sonriendo, declaró que estaría en condiciones de medirla al milímetro sin ningún instrumento y sin necesidad de subir a la cima de la mastodóntica construcción.
Aplicando el teorema de los ángulos similares, Tales demostró a los sacerdotes egipcios la posibilidad de medir la altura de las pirámides sin subir hasta la cima y sin ninguno de los instrumentos empleados por los ingenieros del Faraón.*

*Masini, Giancarlo, *Historia ilustrada de la Matemática*.
España, Edición especial para Círculo de Lectores, 1980.

1. Reúnete con un compañero y contesten lo que se les pide.
   a) ¿Cómo calcularían la altura del asta bandera si se conocen los datos indicados?

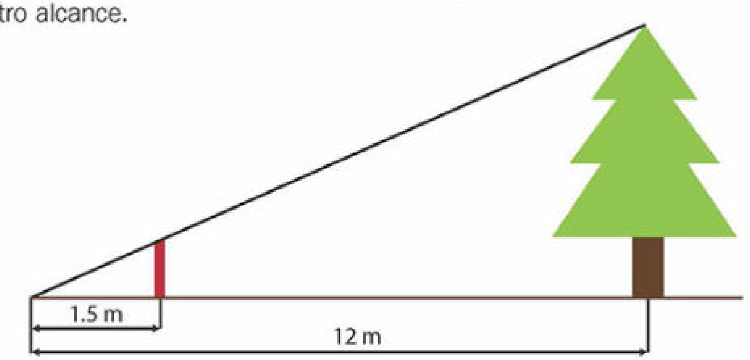
   - ¿Cuál es la altura del asta bandera?
   - ¿Qué hicieron para encontrar la medida?
   - ¿Creen que Tales de Mileto hizo algo similar al procedimiento que ustedes utilizaron?



El teorema de Tales y la semejanza de triángulos tienen múltiples aplicaciones, algunas de las cuales estudiaremos en esta lección, continúa y conocerás otras aplicaciones de la semejanza de triángulos.

A veces queremos calcular algunas distancias y no contamos con los instrumentos ideales para ello. Veamos cómo se pueden resolver dichas situaciones.

2. ¿Cómo calcular la altura de un árbol? Escribe en tu cuaderno una sugerencia.
   Una forma sería considerar su sombra con respecto a otros elementos que estén a nuestro alcance.



La altura se mide perpendicular al piso. Si se coloca perpendicularmente una regla que proyecte su sombra en el extremo de la del árbol y se mide la distancia del extremo de la sombra a la regla y al pie del árbol, se establece una proporción.

3. Completa la tabla.

	De la regla	Del árbol
Altura	1 m	h
Sombra	1.5 m	12 m

$\frac{1}{1.5} = \frac{h}{12}$ | $h = \frac{1(12)}{1.5}$ | $h =$ ______

Por lo tanto, el árbol tiene una altura de ______ metros.

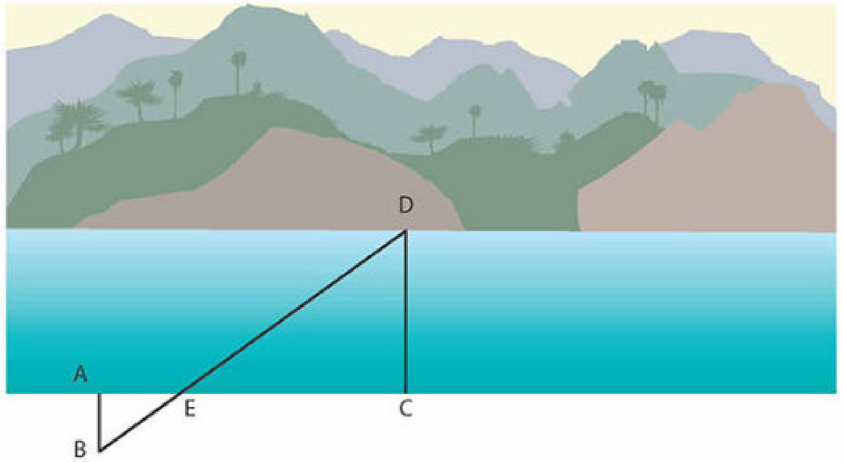
Lo importante es que al establecer la proporción formes las razones con elementos homólogos, sin cambiar el orden en que se consideran las figuras.

4. Reúnete con un compañero y resuelvan los siguientes problemas. Comparen sus procedimientos y resultados con otras parejas. Analicen aquellos que lo requieran con la guía de su profesor.

a) Un edificio proyecta una sombra de 5 m; en ese mismo instante, una persona de 1.80 m de altura proyecta una sombra de 1.25 m. ¿Cuál es la altura del edificio?

b) Un edificio de 20 m de altura se localiza a 15 m de distancia de otro más alto. En una hora determinada, a 40 m del edificio más alto coinciden los puntos finales de las dos sombras, ¿cuánto mide el edificio más alto?

c) Considera la figura y los datos para calcular el ancho del río.



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

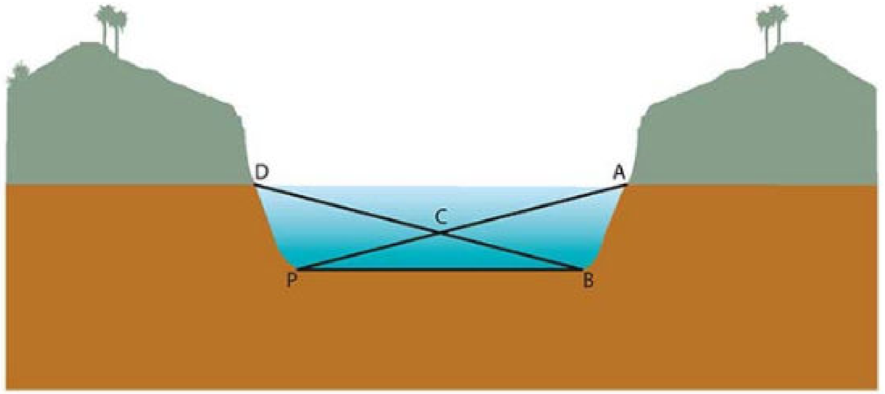
$\overline{BE} = 3.6$ m

$\overline{AB} = 4.6$ m

$\overline{CE} = 9$ m

$\overline{DC} =$ ______

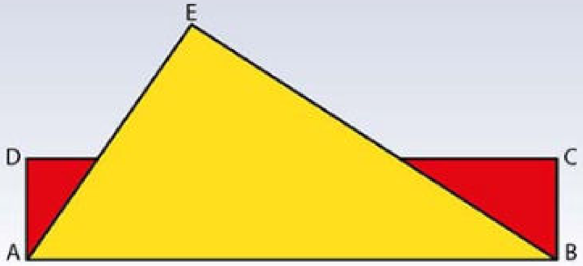
d) Cuatro personas desean medir el ancho de una laguna. Para ello se sirven de teodolitos que determinan las medidas $\overline{CP} = 500$ m, $\overline{PB} = 2\,500$ m y $\overline{CD} = 600$ m, ¿cuánto mide el ancho de la laguna?



- ¿Crees que tiene grandes aplicaciones el teorema de Tales de Mileto en el cálculo de distancias inaccesibles? Justifica tu respuesta.
- ¿En cuáles otras situaciones lo utilizarías?

Supera el reto

Observa el rectángulo ABCD y el triángulo ABE. Sin hacer operaciones, determina cuál de los dos polígonos tiene mayor área.



Explora

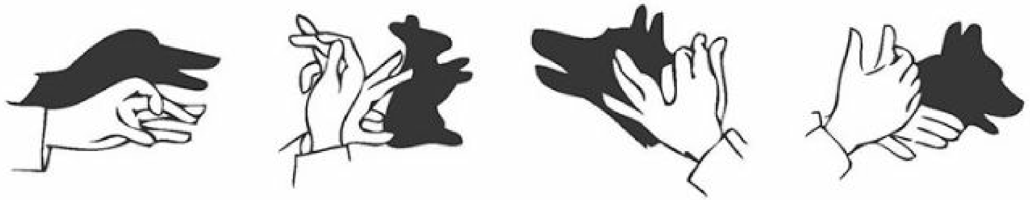
Comprueba lo aprendido sobre el Teorema de Tales en la sección del mismo nombre de la siguiente página: http://descargas.pntic.mec.es/cedec/mat3/contenidos/u6/M3_U6_contenidos/11_teorema_de_thales.html Verifica que cuentas con el software adecuado para realizar la actividad. (Consulta: 25 de enero de 2017).

Figuras y cuerpos

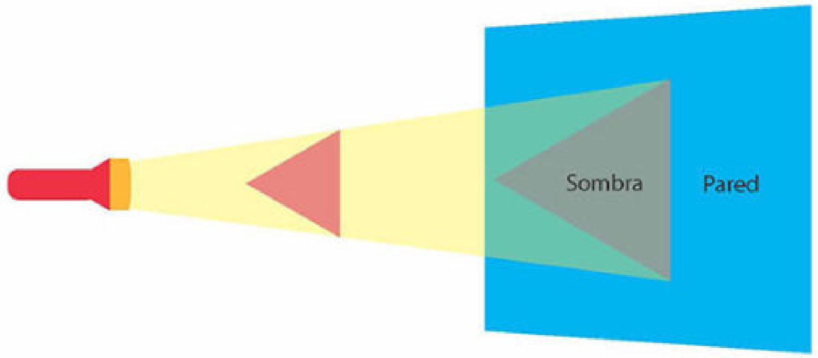
Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas

Lección 25. Homotecia

En China se cuenta una leyenda que representa para su población el origen del teatro de sombras. Se dice que cuando el emperador Wu-Ti perdió a su mujer Wang, por la que sentía un profundo amor, cayó en la más completa apatía. Todos en la corte intentaron diferentes modos de devolverle el gusto por la vida, pero ni los juglares, ni los bufones, ni los cocineros pudieron hacer que olvidara su tristeza.
Entonces apareció Sha-Wong, quien se declaró capaz de hacer revivir a la bella Wang. Ante el asombro de todos, colocó frente al emperador una tela tendida entre dos postes sobre la cual hizo aparecer unas sombras de su bien amada.



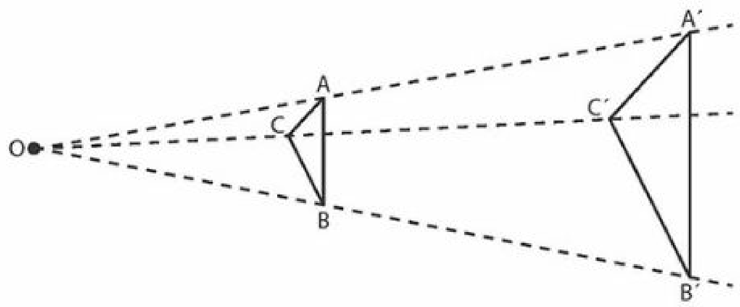
1. Reúnanse en equipos y jueguen a las sombras. Necesitan una lámpara y figuras como triángulos, cuadrados o rectángulos de cartulina. Colóquense cerca de la pared, tomen una figura y con la lámpara proyecten su sombra, como aparece en la imagen de abajo.



a) Contesten lo siguiente:
   - ¿Cómo son entre sí las dos figuras, la original y la sombra?
   - ¿Qué pasa si acercas la figura a la pared?
   - ¿Qué pasa si la alejas?
   - ¿Qué harían para conocer las medidas de la figura proyectada si se conocen las de la figura original?

Las figuras que proyectaron son homotéticas.

2. Observa las siguientes figuras.



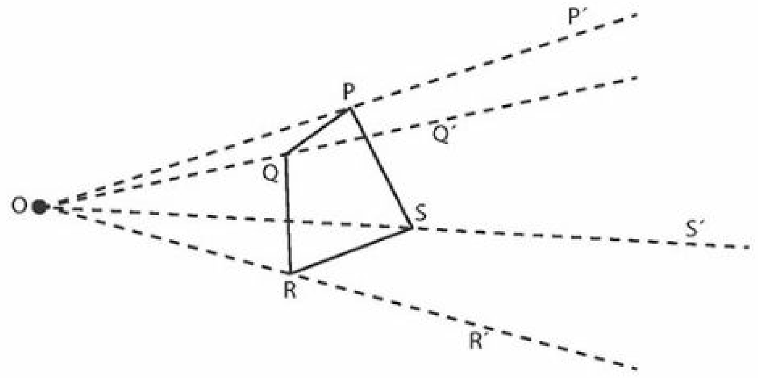
a) Supón que el punto O es la lámpara y el triángulo grande es la sombra proyectada del triángulo pequeño. ¿Cuál será la razón de semejanza? también denominada razón de homotecia.

b) En tu cuaderno traza el punto O y el polígono ABC. Con tu compás, toma la medida OA, luego toma 2 veces esta medida y encontrarás el punto A'. Realiza el mismo procedimiento con los puntos B y C para encontrar B' y C', al final une los puntos y se formará el triángulo A'B'C'.
   - Comenta con tus compañeros qué consideras que es la homotecia.
   - ¿Crees que la homotecia es una transformación que asocia figuras semejantes y cuyos lados son paralelos?
   - ¿Cómo demostrarías que las figuras homotéticas son semejantes y que los lados son paralelos?

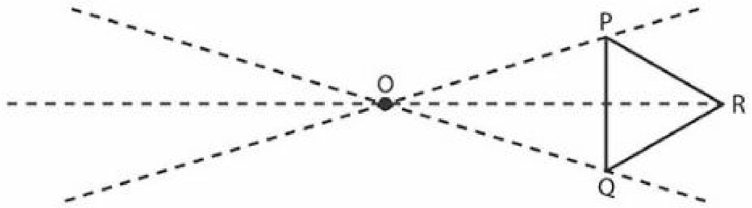
Las figuras que resultan de prolongar las líneas de referencia al centro de homotecia en sentido contrario a éste son homotéticas junto con la original.

3. Reúnanse en equipo y resuelvan lo siguiente en sus cuadernos.

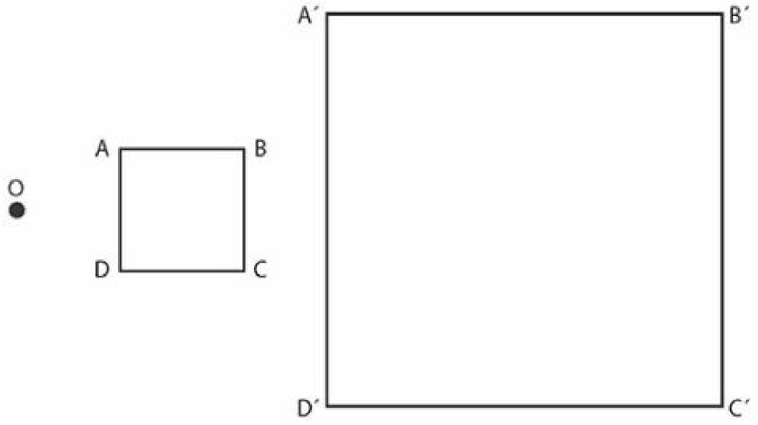
a) Se tiene el polígono PQRS y su centro de homotecia O, la razón de homotecia es igual a 1. Construyan su polígono homotético.



b) Ahora, consideren el triángulo PQR, cuya razón de homotecia es igual a –1. ¿Cómo construyen el polígono homotético?

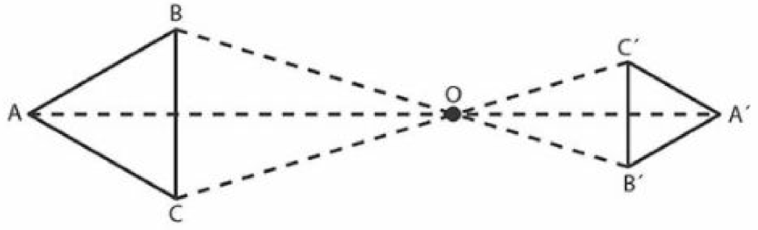


4. En las siguientes figuras, unan desde el punto O, con líneas rectas, los vértices correspondientes, es decir, A con A', B con B', C con C' y D con D'.



Estas figuras son semejantes u homotéticas. Las líneas que trazaste coinciden en el punto O, al que identificaremos como centro de homotecia.

5. Analiza estas figuras.



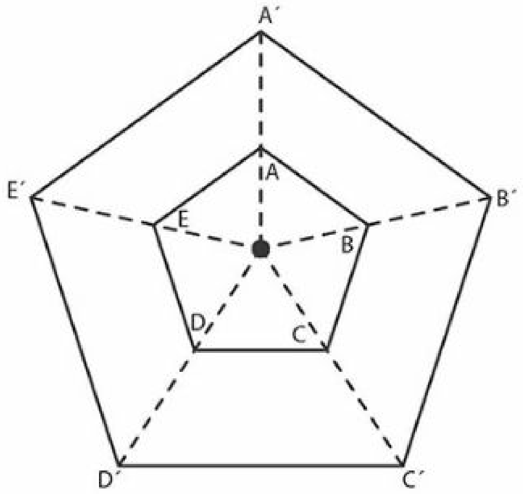
a) ¿Dónde se encuentra el centro de homotecia?
b) ¿Qué sucedió con la figura resultante?
c) ¿Cambió la medida de los ángulos de una y otra figura?

Comparen las homotecias anteriores y comenten qué ocurrió en cada una y qué pueden concluir.

Idea matemática

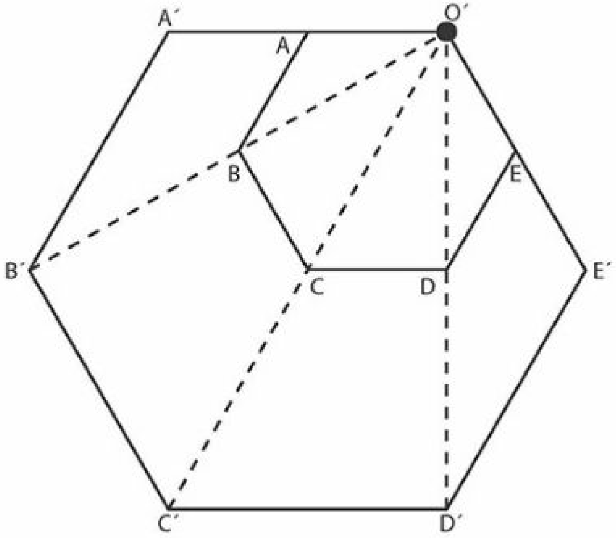
Cuando la razón de homotecia es positiva, la homotecia es directa y las figuras están del mismo lado; en cambio, si la razón de homotecia es negativa, la homotecia es inversa y las figuras están en uno y otro lado del centro de homotecia.

6. Analiza las homotecias y contesta.



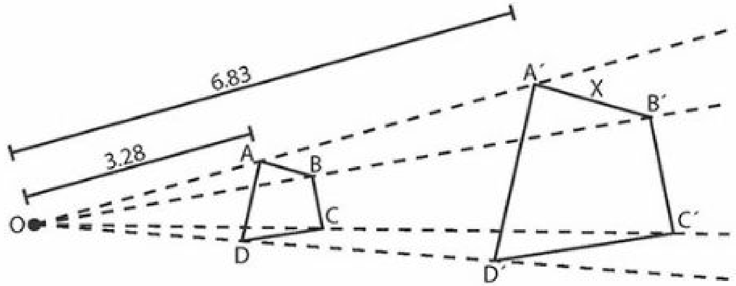
a) ¿Dónde se encuentra el centro de homotecia?
b) ¿Cuál es la razón de homotecia?

7. Las siguientes figuras, ¿serán homotéticas?, ¿por qué?



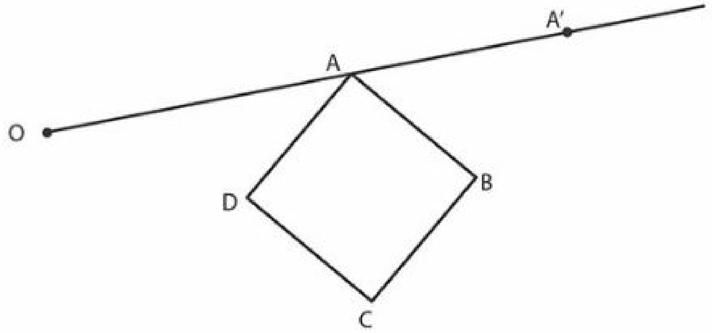
a) ¿Dónde está su centro de homotecia?
b) ¿Cuál es su razón de homotecia?

8. Observa las siguientes figuras homotéticas y, utilizando tus conocimientos de figuras semejantes, obtén la razón de semejanza y la razón de homotecia. Usa tu calculadora para rectificar tus resultados.



a) ¿Qué sucedió con ambas razones, la de semejanza y la de homotecia?

9. Construye la figura homotética de la que se presenta a continuación y obtén la razón de semejanza y de homotecia.

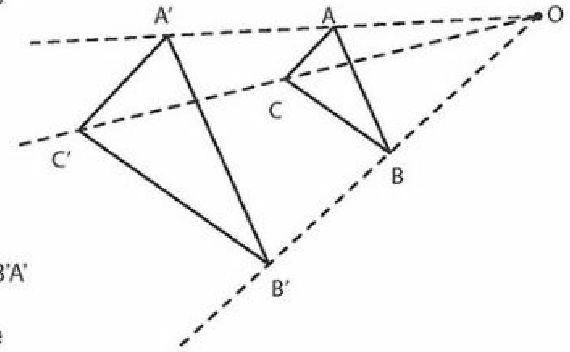


a) Reúnanse en equipos y redacten brevemente lo que observaron para obtener las razones de semejanza en ambos casos.

10. Observa las figuras homotéticas
Si el $\triangle OCB \cong \triangle OC'B'$ entonces el $\measuredangle OBC \cong \measuredangle O'B'C'$

De igual forma, si el $\triangle OCA \cong \triangle OC'A'$ entonces el $\measuredangle OBA \cong \measuredangle O'B'A'$

Si restamos miembro a miembro
$\measuredangle OBC - \measuredangle OBA \cong \measuredangle OB'C' - \measuredangle O'B'A'$
entonces: $\measuredangle B = \measuredangle B'$
¿Qué sucede con los ángulos de las figuras homotéticas?

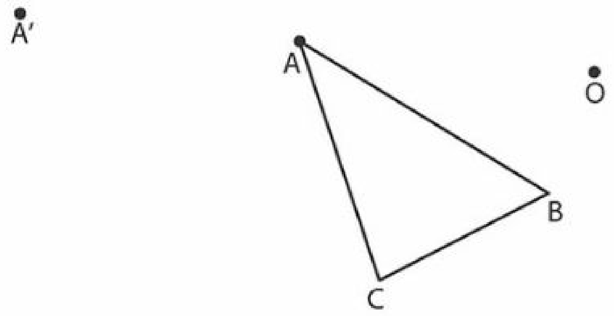


11. Reúnanse en equipos y apliquen la semejanza de triángulos para argumentar como en el ejercicio anterior que:

$\measuredangle A = \measuredangle A'$

$\measuredangle C = \measuredangle C'$

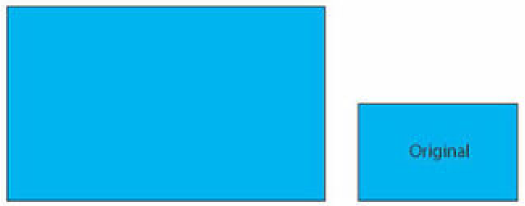
12. Construye la figura homotética de la que se presenta a continuación y mide los ángulos de ambas figuras.



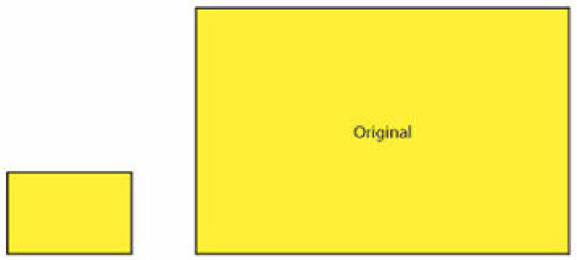
a) ¿Cómo son los ángulos homólogos?
b) Comenta tus respuestas con tus compañeros de grupo.
c) Elabora en tu cuaderno conclusiones con ayuda de su profesor.

Idea matemática

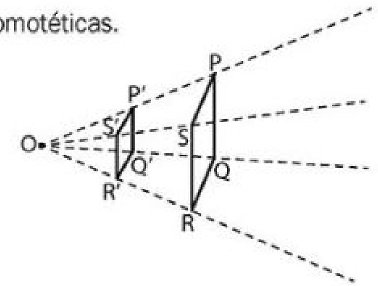
Si en dos figuras semejantes la medida de uno de sus lados es el doble que la de su lado correspondiente; están en escala de 2:1.



Una escala 1:3 significa que la medida de un lado tendría que ser un tercio de la de su lado correspondiente.



13. Observa las figuras homotéticas.



a) En parejas, construyan la figura homotética del polígono PQRS de tal forma que esté en escala de 1:2. Es decir si $\overline{OP}$ = 4 cm, la mitad será igual a 2 cm = $\overline{OP}'$. Realiza lo mismo con las demás medidas de los segmentos OQ, OR y OS.

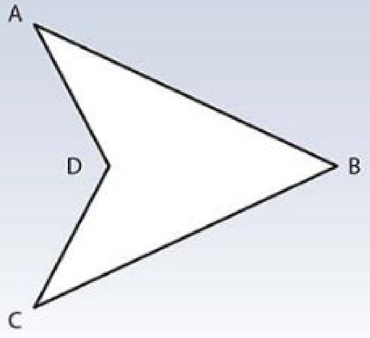
b) Ahora construyan otra figura a escala 2:1. Es decir si $\overline{OP}$ = 4 cm, el doble será 8 cm, por lo que $\overline{OP}''$ = 8 cm.

Idea matemática

A las construcciones anteriores las llamaremos composición de homotecias con el mismo centro, esto es, igual al producto de sus razones.

Supera el reto

Construye una composición de homotecias para esta figura.



Explora

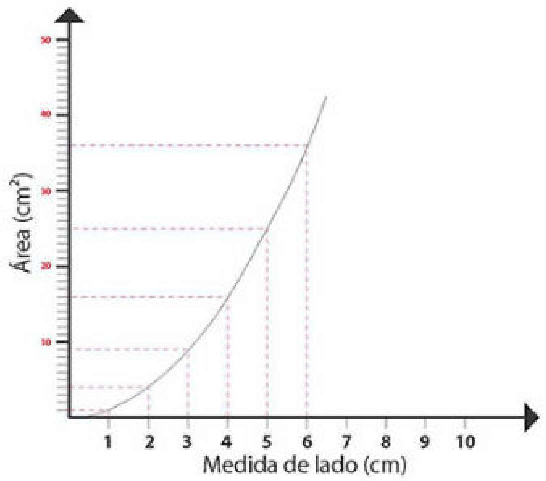
Consulta el sitio electrónico http://www.lanubeartistica.es/Dibujo_Tecnico_Primero/UD2/dt1_U2_tema_2_v01/32_figuras_homotticas.html Revisa las construcciones de figuras homotéticas a un polígono cuando se conoce la razón y el centro de homotecia. Verifica que cuentas con el software adecuado para realizar la actividad. (Consulta: 23 de enero de 2017).

Proporcionalidad y funciones

Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos

Lección 26. Encontrando expresiones cuadráticas

1. La siguiente gráfica representa la variación del área de un cuadrado en función de la medida de sus lados.



a) Analiza la información y responde:

- Si la medida de cada lado es de 1 cm, ¿cuál es su área?
- Si la medida de cada lado es de 2 cm, ¿cuál es su área?

b) Completa la tabla.

Medida del lado (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Área (cm^2)	1	4	9	16						

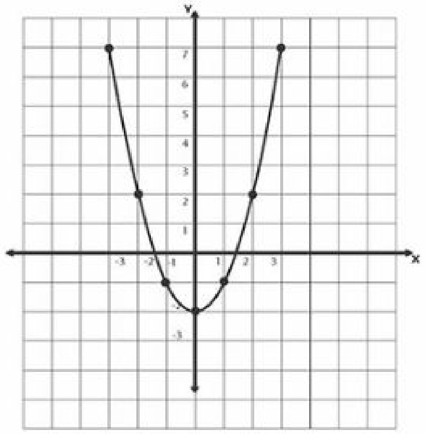
c) Completa la gráfica con los puntos de la tabla.

- ¿Qué tipo de línea se forma?
- ¿Cuál es la expresión que representa esta función? Escríbela de la forma:

  $y =$ ____________

- Si a es el coeficiente del término cuadrático, ¿cuánto vale a?
- Si b es el coeficiente del término lineal, ¿cuánto vale b?

2. En equipos analicen la siguiente gráfica.



a) ¿Qué forma tiene la figura?

b) Escriban los valores que hacen falta en la siguiente tabla.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

La relación entre estos datos corresponde a una función cuadrática.

c) ¿Cómo harían para obtener la expresión algebraica que corresponde a esta función?

A continuación se muestra una estrategia basada en tus aprendizajes adquiridos durante las lecciones anteriores. Recuerden que una función cuadrática se expresa como:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Al expresarla como una ecuación tenemos:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

d) Obtengan los valores de a, b y c. Completen en su cuaderno las siguientes expresiones y valídenlas con su profesor.

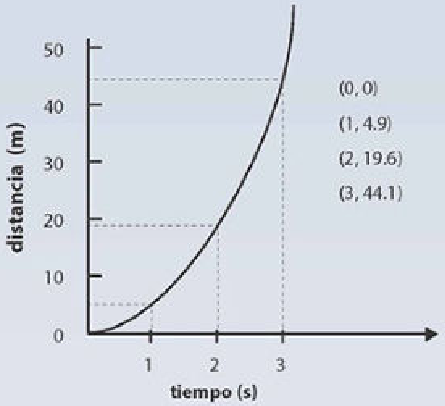
- Si se sustituye $x = 0$, resulta $y = a(0^2) + b(0) + c$. Ahora tomen el dato de la gráfica, $y = -2$, ¿cuál es el valor de c?
- Si se sustituye $x = 1$, y el valor de c que acaban de obtener, se obtiene como resultado $y = a(1)^2 + b(1) +$ ________. A partir del dato de la gráfica, $y = -1$, ¿cuál es el valor de b?
- Si se sustituye $x = 2$, y b y c por los valores encontrados anteriormente se obtiene: $y = a(2)^2 +$ ______ $+$ ______ tomando el dato de la gráfica que corresponde, ¿cuánto vale y? ¿cuánto vale a?
- Al reemplazar a, b y c, por sus valores se completa la ecuación que representa esa función, escríbanla.

Supera el reto

En equipos, analicen la información y realicen lo que se indica. Anoten las respuestas en sus cuadernos.

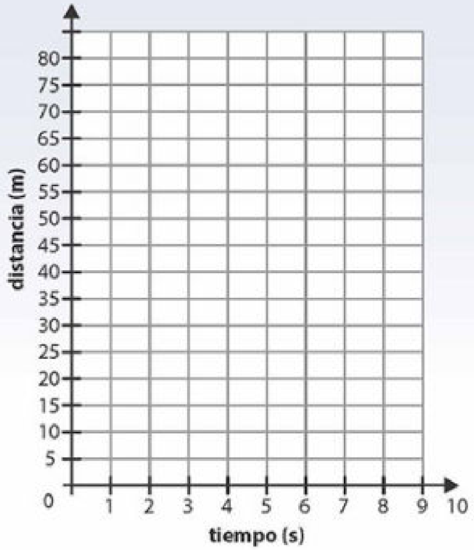
Se deja caer un objeto en caída libre desde la ventana de un edificio y se registran los siguientes datos hasta que toca el piso.

t (tiempo en segundos)	0	1	2	3
d (distancia en metros)	0	4.9	19.6	44.1



- ¿Qué distancia recorrería dicho objeto si tardara 4 segundos en llegar al piso?
- Completen la tabla y construyan la gráfica correspondiente.

x (tiempo)	y (distancia)	(x, y)
0	0	(0 , 0)
1	4.9	(1,)
2	19.6	(, 19.6)
3		(3,)
4		



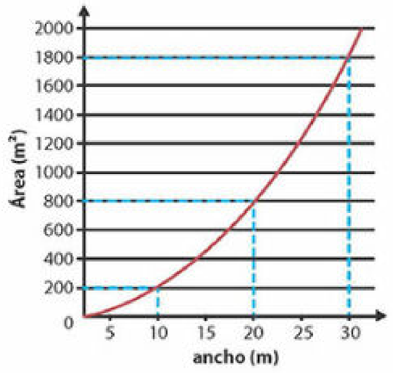
- Conociendo que la expresión que modela esta función es de la forma:

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

- Obtengan los valores de a, b y c.
- ¿Cuál es la ecuación específica que corresponde a esta gráfica?

3. De manera individual, resuelve las siguientes situaciones.

a) Se desea conocer el área de un terreno de forma rectangular y sólo se sabe que el frente (ancho) mide la mitad de su profundidad (largo). Para tomar una decisión de compra, se trazó la gráfica que se muestra a continuación.



- ¿Cuál es el área del terreno, si el frente mide 40 metros?
- ¿Cuál será el área si el frente mide 100 metros?
- Escribe los valores de a = ________, b = ________, c = ________
- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar la función de la gráfica? ¿Cuál ecuación la representa de forma específica?

b) Se planea construir una glorieta en una ciudad. Con el fin de saber qué tamaño es el mejor se elaboró la siguiente tabla. Complétala en tu cuaderno.

Medida del radio (m)	1	2	3	4	5	6	7	8
Área (m^2)	3.14	12.56	28.26					

- En tu cuaderno, traza la gráfica correspondiente.
- ¿Qué figura resulta?
- Escribe los valores de a = ________, b = ________, c = ________
- ¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar esta función? ________
- ¿Cuál es su ecuación?
- Si el radio midiera 15 m, ¿cuál es la superficie que debiera destinarse para la glorieta?

4. Grafica en tu cuaderno las siguientes funciones completando las tablas.

a) $y = x^2 - 4$

x	y	(x, y)
3		
2		
1		
0		
−1		
−2		
−3		

b) $y = 2x^2 + 3x - 2$

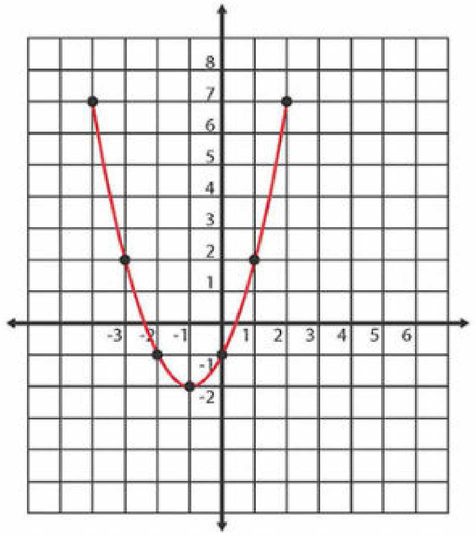
x	y	(x, y)
2		
1		
0		
−1		
−2		
−3		
−4		

- Escribe la ecuación cuadrática que corresponde a cada una e indica los valores de cada constante.

Ecuación: ____________________ Ecuación: ____________________

a = ______, b = ______, c = ______ a = ______, b = ______, c = ______

5. Obtén la expresión algebraica que corresponde a la siguiente gráfica.



(-1, -2)
(0, -1)
(-2, -1)
(-3, 2)
(1, 2)
(2, 7)
(-4, 7)

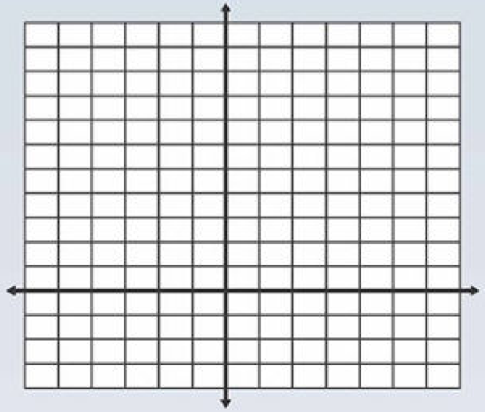
Revisen en equipos sus resultados y procedimientos.

Supera el reto

1. Haciendo uso de los conocimientos aprendidos en esta lección, resuelve la siguiente situación.

   a) Juan Manuel lanza hacia arriba y al frente una pelota, de tal manera que llegue a las manos de Luis, quien se encuentra frente a él a unos metros de distancia. Conociendo que la altura (h) está considerada en metros y el tiempo (t) en segundos, la expresión que representa esta relación de magnitudes es $y = -t^2 + 6t$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota al ser lanzada?

   Nota: Puedes utilizar el esquema para facilitar el procedimiento para obtener la respuesta.



- ¿Qué hiciste para encontrar la solución de este desafío?
- Compártelo con tus compañeros de grupo.
- ¿Qué fue lo que te pareció más fácil de esta lección?
- ¿Qué fue lo que más se te dificultó?
- ¿Por qué?
- Al graficar una función cuadrática, ¿cuál es la figura que se forma invariablemente?

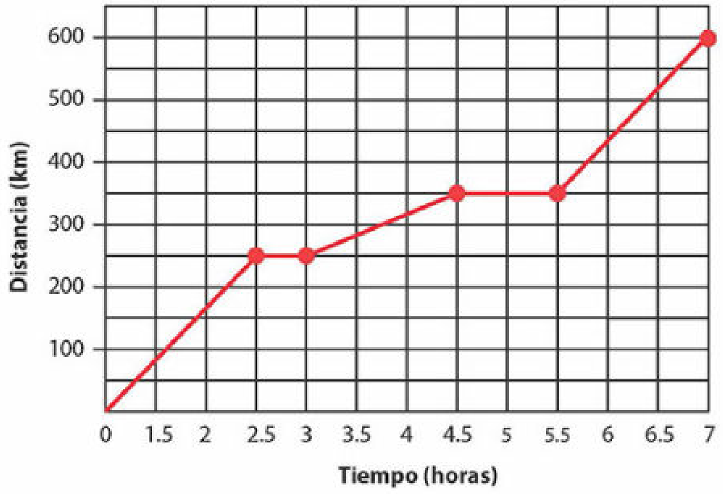
2. Escribe la estrategia que te parece más sencilla para que a partir de una gráfica se obtenga con mayor facilidad la expresión algebraica de una función cuadrática.

Proporcionalidad y funciones

Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera

Lección 27. Recorridos y llenados

1. En parejas, analicen la gráfica que representa el recorrido que hace un conductor desde la ciudad de México a San Luis Potosí haciendo parada en dos poblaciones de Querétaro y de Guanajuato.



   a) ¿A qué distancia hizo su primera parada?
   b) ¿Cuánto tiempo permaneció en ese lugar?
   c) ¿A qué velocidad promedio se desplazó desde México a Querétaro?
   d) ¿Qué tiempo tardó en trasladarse de Querétaro a Guanajuato?
   e) ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a San Luis Potosí?
   f) Expliquen, ¿cómo hicieron para conocer las respuestas?

En grupo, revisen sus respuestas.

B3

Supera el reto

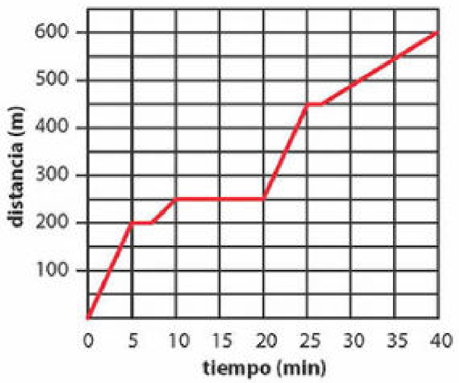
En grupo, lean la situación que se plantea y respondan las preguntas.

Después de lavar una cisterna se le deja llenando de agua. La llave que surte el agua descarga 1 000 litros cada 20 minutos, pero cada determinado tiempo cortan el suministro de agua y el llenado se suspende; sin embargo, mientras la cisterna se llena, la gente que habita en el lugar ocupa agua en diversas ocasiones.

- ¿Cuántos litros va llenando la cisterna por minuto?
- ¿Cuánto tiempo pasa desde que empieza a llenarse hasta que se suspende el suministro?
- ¿Cuántos litros se alcanzan a juntar durante ese tiempo?
- ¿Cuánto duran los lapsos de tiempo de suspensión del suministro de agua?
- ¿Qué ocurre a partir del inicio del llenado, entre los 150 y 210 minutos?
- ¿Qué cantidad de agua se utilizó durante los 360 minutos?
- ¿Con qué cantidad de agua quedó la cisterna a las 6 horas de haber iniciado el llenado?
- Planteen dos preguntas más que se puedan contestar a través del análisis de la gráfica.
- Comenten sus respuestas y los procedimientos que siguieron para obtenerlas.

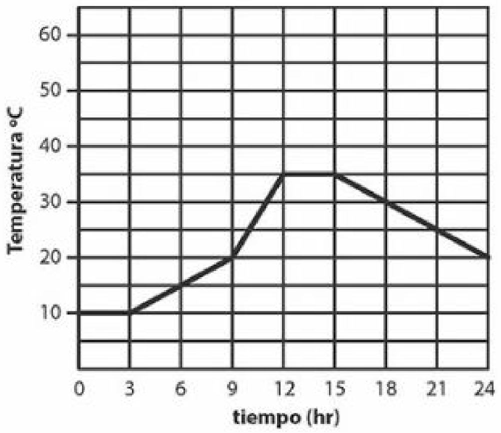
2. De manera individual, resuelve las siguientes situaciones.

a) En la gráfica se presentan los tiempos y distancias que hace Lucía en el recorrido de su trabajo a su casa.



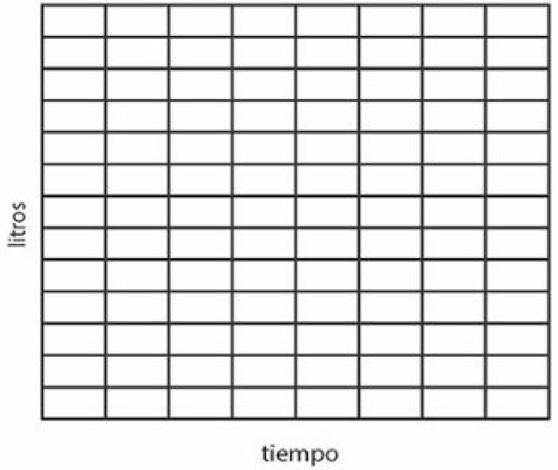
- ¿Cuántas paradas hace en el camino?
- ¿Cuánto tiempo se entretuvo en estas paradas?
- ¿En cuánto tiempo llegó a su casa?
- ¿Cuántos metros recorre de su trabajo a su casa?
- Si se hubiera ido directo del trabajo a su casa, ¿cuánto tiempo hubiera hecho? Justifica tu respuesta y represéntala en la gráfica.

b) La siguiente gráfica muestra la temperatura en una ciudad del norte de México durante un día.



- ¿A cuántos grados estaba la temperatura cuando se comenzó a hacer el registro?
- ¿A qué hora llegó la temperatura a su máximo?
- ¿Cuánto tiempo duró estable la temperatura?, ¿en qué horario?

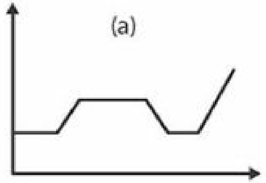
c) José se ha propuesto llenar una alberca después de haberla lavado. Para que no se sobrecaliente la bomba, suspende su actividad cada 2 horas por un lapso de 30 minutos. La alberca tiene una capacidad de 90 000 litros y cada dos horas el agua alcanza una capacidad de 30 000 litros. Representa esta situación en una gráfica y contesta las preguntas.

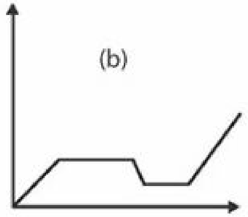


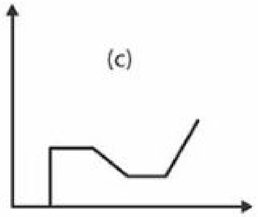
- ¿Cuánta agua tendrá la alberca en una hora?
- ¿En cuánto tiempo habrá cubierto José la mitad del llenado de la alberca?
- ¿En cuánto tiempo quedará llena la alberca?

d) Determina cuál de las gráficas representa la situación que se plantea a continuación.

Una persona que sale a dar un paseo comienza a caminar en ascenso y después de 5 minutos camina en plano para luego descender cierta distancia y continúa en plano; después de 10 minutos vuelve a ascender hasta llegar a la cima de un cerro.







Nociones de probabilidad

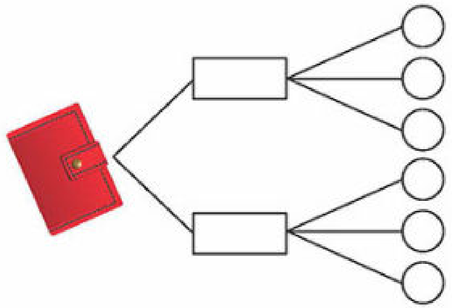
Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)

Lección 28. Regla del producto

Analiza la situación y realiza lo que se te pide.

1. Una señora tiene en su monedero 2 billetes, uno de \$50 y otro de \$100, así como 3 monedas: una de \$20, otra de \$10 y una más de \$5. Sin ver, saca un billete y una moneda.

   a) ¿Por qué sacar uno u otro billete no afecta al evento de sacar una moneda?
   b) ¿Cuántas posibilidades de billete y moneda puede obtener?
   c) ¿Qué probabilidad hay de que saque un billete de \$100 y una moneda de \$10?
   d) ¿Cómo lo resolviste? Coloca las denominaciones en billetes y monedas en la siguiente imagen.



   e) ¿Cómo se llama este tipo de esquema?
   f) ¿Para qué sirve?
   g) Completa el arreglo rectangular.

BILLETES / MONEDAS		
		
		
		

¿Qué relación hay entre el diagrama de árbol y el arreglo rectangular?

2. La señora sacó el dinero para comprar una paleta. Completa la tabla con los datos que te indique el profesor.

Sabor / Tamaño				
Chica				
Mediana				
Grande				

a) ¿Cuántas alternativas tiene la señora para escoger el tamaño y el sabor?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que escoja una paleta chica?

c) El muchacho que despachó le indicó que eligiera en su cubierta de chocolate chochos o lunetas. Entonces, ahora ¿cuántas opciones tiene en total la señora?

d) ¿Cuál sería la probabilidad de que el siguiente cliente elija una paleta grande sabor a piña con lunetas?

e) Elabora en tu cuaderno un diagrama de árbol con los sabores, tamaños y extras.

f) ¿Qué principio puedes deducir con el ejemplo del monedero y con el de los helados?

Idea matemática

Regla del producto de probabilidades

Sean A, B dos eventos independientes entonces se tiene que la probabilidad de la ocurrencia de dos eventos independientes es igual al producto de sus probabilidades:

$$(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Por ejemplo si consideramos el experimento de lanzar dos dados, en donde el evento A es obtener un número par en el primer dado y el evento B es obtener un número impar en el segundo dado. Podemos observar que ambos eventos son independientes.

Por lo que $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$

Entonces la probabilidad de que ocurra A y B es $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

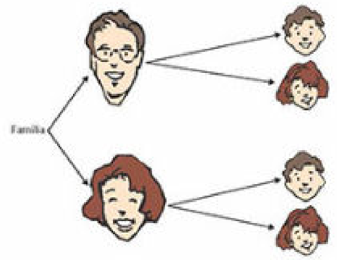
De donde $P(A \cap B) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

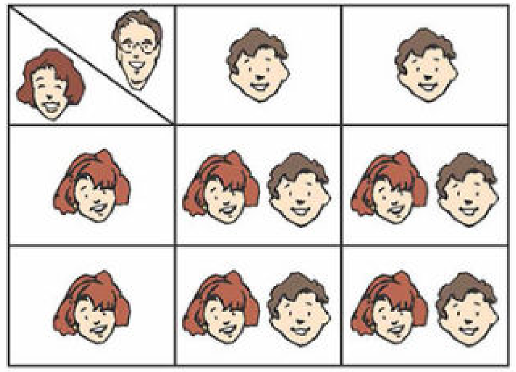
Por lo tanto $P(A \cap B) = \left(\frac{1}{4}\right)$

Idea matemática

Formas de representar las posibilidades de ocurrencia

Los diagramas de árbol son una representación gráfica de las posibilidades que se pueden dar en problemas donde hay varias opciones a elegir.





Los arreglos rectangulares son representaciones donde una de las opciones es un factor (horizontalmente) y las otras opciones el otro factor (verticalmente). Se multiplica como tabla pitagórica, en la cual los resultados son posibles combinaciones.

La suma de las probabilidades en todas las ramas que salen de cualquier punto debe ser igual a 1 y la suma de las probabilidades de todos los resultados posibles también debe ser igual a 1.

3. En parejas resuelvan las siguientes situaciones.

a) Mario fue premiado con un viaje. Él puede elegir entre Mazatlán o Cancún como destino, también puede escoger transportarse en avión o autobús y además llevar a uno de sus dos hermanos.
- ¿Qué probabilidad tiene de ir en autobús?
- Muestren todas las opciones para realizar el viaje.
- ¿Cómo lo resolvieron?
- ¿Qué es más práctico en un problema como éste; el diagrama de árbol o el arreglo rectangular? ¿Por qué?

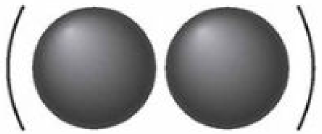
b) Calcula la probabilidad de cada evento que se presenta.
- Que Juan decida vestirse de pantalón negro y camisa roja si:
  A = {Pantalones: negro, blanco y azul} y
  B = {camisas: roja y verde}
- De Ana, Rosa y Carmen, ¿cuál es la probabilidad de escoger a Ana (A) para sentarla en la mesa de honor?
  De Raúl, Pedro y José, ¿cuál es la probabilidad de escoger a Raúl para sentarlos en la mesa de honor?
  Calcula $P(A \cap B) =$
- Si A = {De las bebidas que hay en la casa: café y té, que nos sirvan café}
  B = {De los alimentos que hay en la casa: pan, pastel, tamales y galletas, que nos sirvan pastel}
  Calcula $P(A \cap B) =$

- A = {De las faldas que tiene Lulú: 1 negra, 2 azules y 3 blancas, que se ponga una blanca}
  B = {De los suéteres que tiene Lulú, 2 negros y 3 blancos, que se ponga uno negro}
  Calcula $P(A \cap B)$ =
  ¿Qué tipo de evento son?, ¿cómo lo dedujeron?

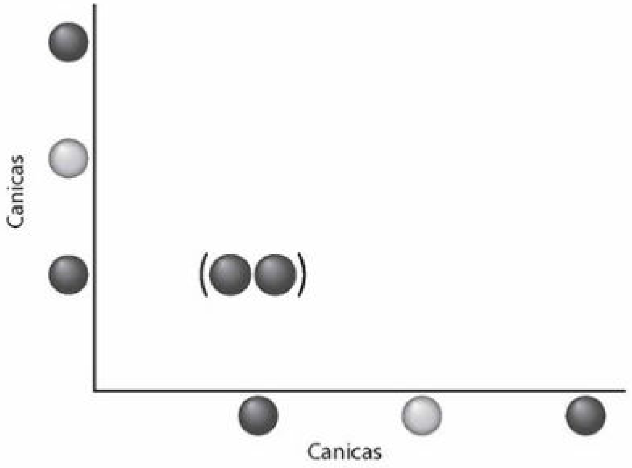
c) Una bolsa opaca contiene 3 canicas. Se extrae una y se registra el color; se vuelve a introducir a la bolsa y se extrae una segunda que también se registra.

- ¿Qué combinación de las siguientes tiene mayor probabilidad de salir?

- ¿Cuál es la probabilidad de que salga la siguiente combinación? ¿Por qué?



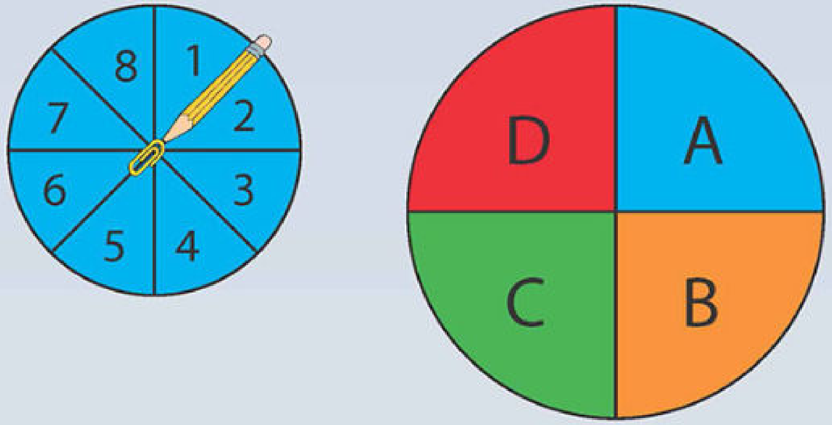
- Muestra que la suma de todos los resultados posibles es igual a 1.
- Representa los eventos mediante arreglos rectangulares y completa el diagrama cartesiano. Compruébalos realizando el diagrama de árbol.



- ¿Cuál de los 3 diagramas te facilita la resolución de problemas relacionados con la regla del producto?
- ¿A qué se debe?

Supera el reto

1. En parejas, tracen en su cuaderno 2 ruletas de 16 cm de diámetro. Antes de comenzar a jugar, contesten las cuestiones.



- ¿Qué creen que saldrá más veces: un número primo o un compuesto?
- ¿Qué letra saldrá más veces?
- ¿Por qué piensan que pasará eso?

2. Para comenzar a jugar se deben realizar 20 giros a cada ruleta colocando un clip en el centro; la punta del lápiz hará que gire. Los resultados deben tabularse en 2 tablas.

Nº	Tabulación	f
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Total		

Letra	Tabulación	f
A		
B		
C		
D		
Total		

- ¿Se cumplieron tus predicciones?, ¿por qué?
- ¿Por qué el girar las ruletas son eventos independientes?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 1 y la letra A?
- Elaboren en su cuaderno un diagrama de árbol con todas las posibilidades y compruébenlo con un arreglo rectangular y un mapa cartesiano.
- ¿Qué diferencia en probabilidad encuentras entre la regla de la suma y la regla del producto?

Lo que aprendí

Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta cuando corresponda.

1. Selecciona la opción correcta que identifica los coeficientes a, b y c de la ecuación cuadrática $3x^2 + 5 = x$.

   a) $a = 3$, $b = 5$, $c = 0$ b) $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$ c) $a = 3$, $b = 1$, $c = 5$ d) $a = 3$, $b = -1$, $c = 5$

2. Calcula el valor del discriminante y determina el tipo de soluciones que tiene la ecuación: $x^2 - 6x + 9 = 0$.

   a) Cero y tiene una solución doble
   b) Cero y no tiene solución en los números reales
   c) -72 y no tiene solución en los números reales
   d) 72 y tiene dos soluciones

3. Establece la ecuación que resuelve la situación, identifica los coeficientes a, b y c y finalmente determinar el resultado.

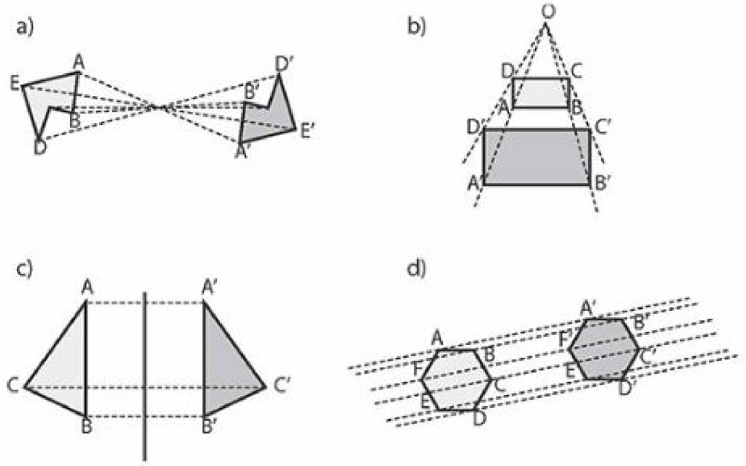
   “Tres números consecutivos cumplen la condición de que al dividir el número mayor entre el menor, el resultado es $\frac{3}{10}$ del número intermedio”.

   • Ecuación: ____________ • Coeficientes: $a =$ ____, $b =$ ____, $c =$ ____ • Los números son: ________

4. La maestra de Matemáticas pidió a sus alumnos que determinaran de las siguientes figuras, a los cuadriláteros que al trazarle sus diagonales formen en su interior triángulos rectángulos que sean congruentes. ¿Cuál de los siguientes cuadriláteros no deben elegir?

   a) El trapecio b) El cuadrado c) El rombo d) Ninguno

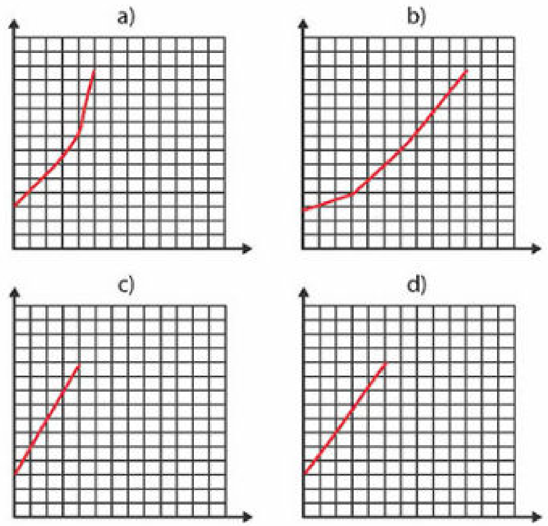
5. ¿Cuál de las siguientes figuras presenta una homotecia positiva? Encierra en un círculo tu respuesta.



6. ¿Cuál es la altura de un árbol que proyecta una sombra de 12 metros a la misma hora que un palo de 1.2 m proyecta una sombra de 1.5 m?

   a) 150 m
   b) 1.5 m
   c) 9.6 m
   d) 0.96 m

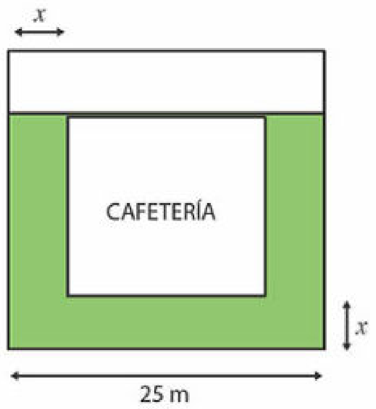
7. ¿Cuál de las gráficas corresponde a la función $y = 2x + 3$?



Mi prueba PISA

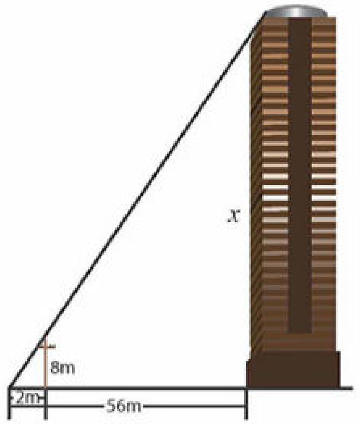
Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta cuando corresponda.

1. En el esquema se muestra una cafetería de forma cuadrada que se construyó en el centro de un terreno de forma cuadrada que mide 25 m por lado. Esta cafetería tiene una franja de jardín por tres de sus lados. En total se cuenta con 275 m^2 de jardín.



   - Determina una expresión algebraica que represente el área de la cafetería.
   - ¿Es más grande el área del terreno o de la cafetería?
   - Establece un modelo matemático que permita calcular el ancho del jardín.
   - ¿Por qué consideras que sólo una de las soluciones de la ecuación que utilizaste para encontrar el ancho del jardín, es la respuesta correcta al problema 7.

2. Calcula la altura aproximada de la torre de Pemex, si a cierta hora de la mañana proyecta una sombra de 56 m, y a la misma hora de la mañana un poste de luz que mide 8 m de altura proyecta una sombra de 2 m, que coincide con la punta de la sombra de la torre.



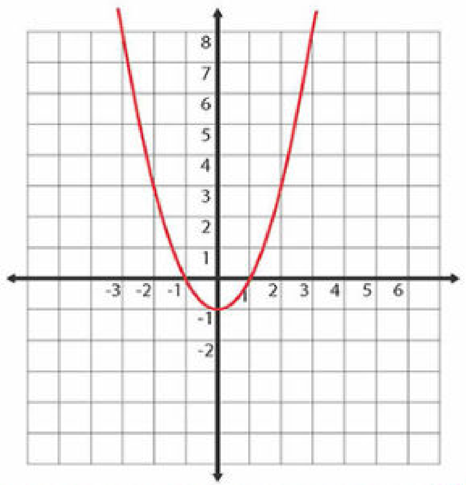
3. ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la siguiente gráfica?

   A) $y = x^2$

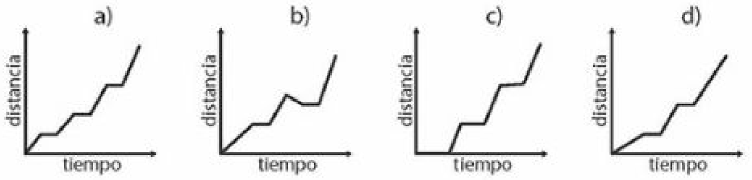
   B) $y = x^2 + 1$

   C) $y = x^2 - 1$

   D) Ninguno de los incisos



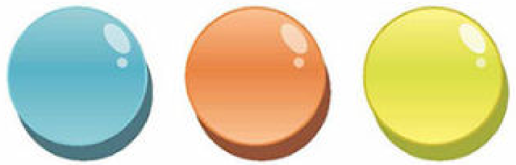
4. Miguel comienza el recorrido de su casa a la escuela pero hace dos paradas antes de llegar a su destino. ¿Cuál de las gráficas representa el recorrido de Miguel? Encierra tu respuesta.



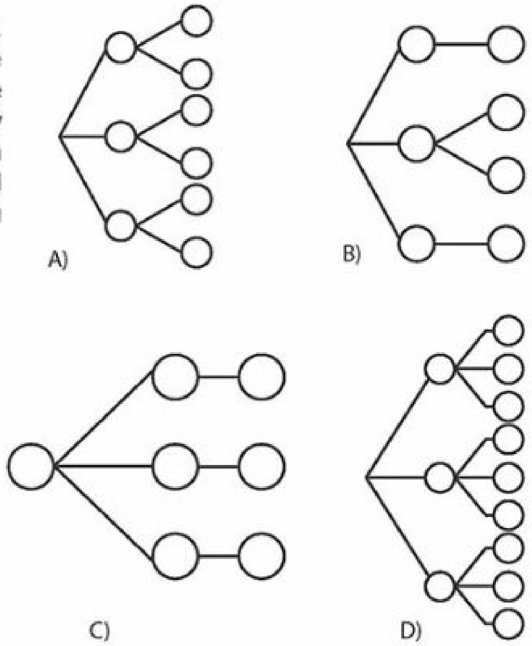
5. ¿Cuál es la probabilidad de la intersección de la pareja de eventos A, B?
   A={De Ana, Rosa y Marta, elegir a una para sentarla en la mesa de honor}
   B={De Raúl, Pedro y José, elegir a uno para sentarlo en la mesa de honor}

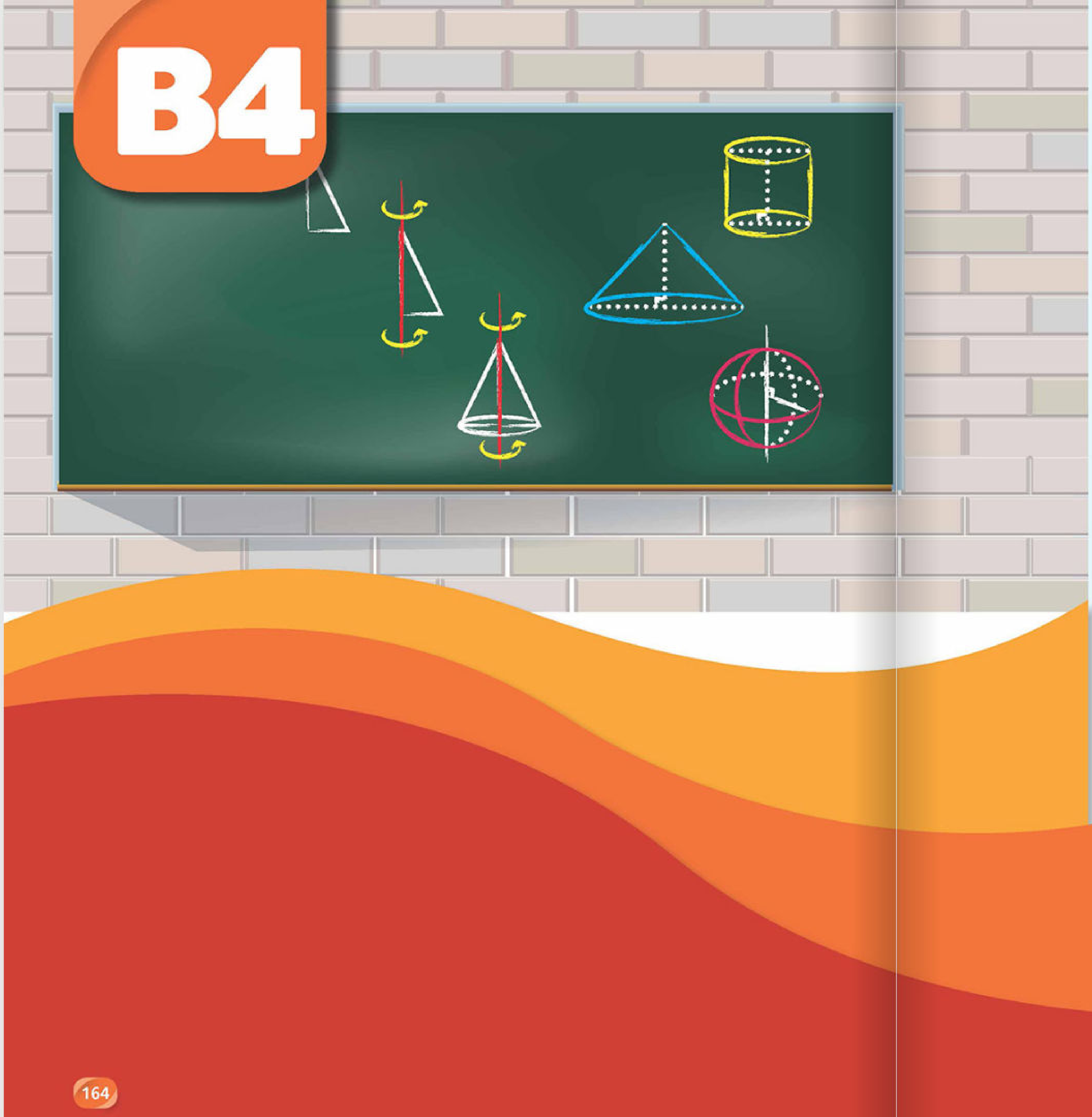
   A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{9}$

6. Se tienen en una caja 3 bolas de colores.



Si se extrae una bola al azar, se registra su color, después se repone la bola extraída, se extrae otra vez al azar una bola y se registra su color, ¿qué opción representa el diagrama de árbol de esta situación? Encierra tu respuesta.





Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media

Evaluación diagnóstica

Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta.

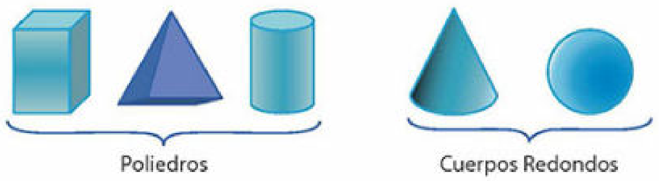
1. ¿Cuál es el número que continúa en la sucesión: 22, 28, 34, 40, ______?

 a) 42 b) 44 c) 46 d) 48

2. ¿Cuál de estas series sigue la regla $n + 3$?

 a) −7, −4, −1, 2, 5 b) 16, −19, −22, −25, −28
 c) 3, 6, 9, 11, 14 d) 1, 3, 6, 10,13

3. Observa los cuerpos geométricos y relaciona correctamente ambas columnas, anotando dentro del paréntesis la letra correspondiente:



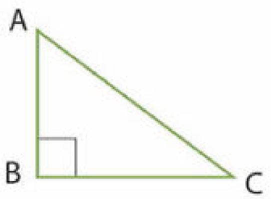
( ) Se clasifican en prismas y pirámides. a) Prismas
( ) Poliedro que tiene sus caras laterales en forma de paralelogramos. b) Cuerpos redondos
( ) A este grupo pertenecen el cilindro, el cono y la esfera. c) Poliedros
( ) Sus bases son dos circunferencias. d) Cilindro
( ) Sólido con una base circular. e) Pirámide
( ) Poliedro que tiene caras laterales en forma de triángulo. f) Esfera
( ) Sólido de revolución, se genera haciendo girar un semicírculo. g) Cono

4. En la expresión $y = 5x - 5$, ¿cuál es el valor de la pendiente?

 a) 10 b) 5 c) −5 d) 0

5. ¿Qué nombre recibe el lado AC del triángulo ABC?

 a) cateto opuesto
 b) cateto adyacente
 c) oblicuo
 d) hipotenusa



6. ¿Cuál de las tablas representa la gráfica?

a)

x	−1	1	2	3
y	−3	0	3	6

b)

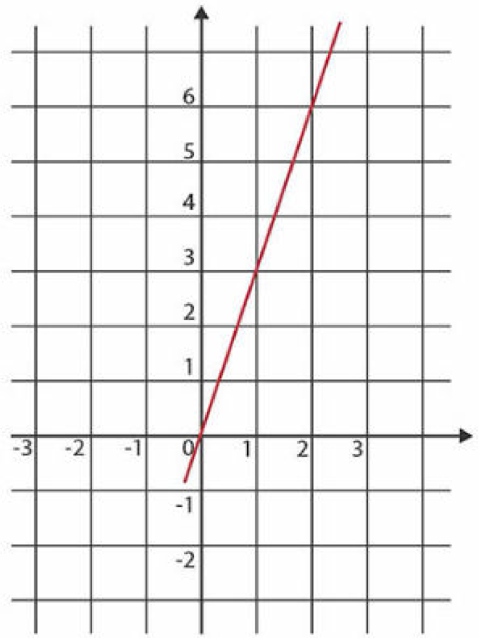
x	−1	1	2	3
y	−3	1	3	6

c)

x	−1	0	1	2
y	−3	0	3	9

d)

x	−1	1	2	3
y	−3	3	6	9



7. ¿Cuál de las tablas representa una variación proporcional?

a)

x	1	2	3	4
y	2	4	6	8

b)

x	1	2	3	4
y	2	3	4	5

c)

x	2	3	4	5
y	4	8	6	8

d)

x	2	4	6	8
y	2.5	6	8	10

8. ¿Cuál es la media aritmética de los asistentes a una serie de conciertos si el lunes hubo 16 000, el martes 9 000, el miércoles 13 000, el jueves 10 000, el viernes 20 000 y el sábado 25 000?

 a) 15 000 personas b) 15 500 personas

 c) 16 000 personas d) 16 500 personas

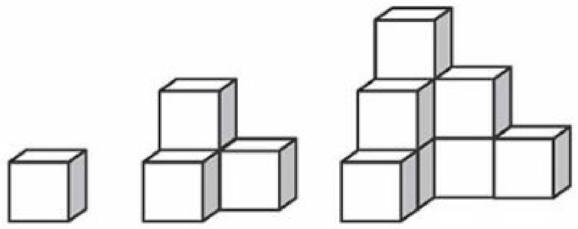
Patrones y ecuaciones

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión

Lección 29. Expresiones cuadráticas

En las lecciones anteriores has resuelto problemas utilizando ecuaciones cuadráticas, ¿recuerdas algunos de ellos?, ¿consideras que las ecuaciones cuadráticas se podrían utilizar para resolver otro tipo de problemas? Coméntalo con un compañero.

1. Formen equipos y observen cada ilustración. Después contesten en sus cuadernos las preguntas.



1 2 3

a) Cuenten los cubos y completen la siguiente tabla.

Ilustración	1	2	3
Número de cubos			

- Analicen la tabla y busquen la relación que existe entre el número de la posición de la figura y el número de cubos con los que está formada.
- Si continúan la sucesión, ¿cuántos cubos formarían la cuarta ilustración?, ¿y cuántos la quinta?
- ¿Con cuántos cubos se puede formar la ilustración que ocupará la vigésima posición en la sucesión?
- ¿Qué hicieron para conocer la respuesta?
- ¿Consideran que las soluciones a las preguntas anteriores se pueden obtener a través de expresiones cuadráticas? Justifica tu respuesta.

b) Completen la tabla con los resultados que obtuvieron.

Ilustración	1	2	3	4	5	10	20	50	x
Número de cubos		4							

- A partir de esta información se concluye que si x es el número de la posición que ocupa el número buscado de esta sucesión, la expresión algebraica que permite conocer el número de cubos que se necesitan para representar la enésima posición es: __________
- En grupo, expliquen por qué consideran que esta expresión es la correcta.

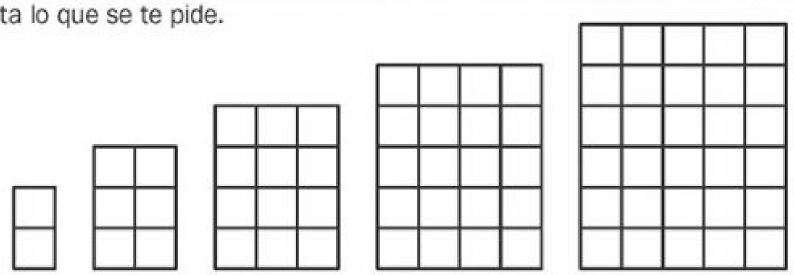
c) Si tienes 25 cubos, ¿la expresión que obtuvieron serviría para determinar qué posición ocuparía dentro de la sucesión la figura que se formaría sin que sobren ni falten cubos? Plantea la ecuación y resuelve.
- Si se sabe que una de las figuras que forman la sucesión tiene 2 704 cubos, ¿qué número le corresponde a dicha figura en la sucesión?
- Una figura con 2 346 cubos, ¿pertenece a la sucesión?, explica por qué.

En equipos, expongan sus respuestas y valídenlas con el resto del grupo. Establezcan conclusiones con ayuda de su profesor.

Supera el reto

Para encontrar el enésimo término de la sucesión del tipo: 1, 4, 9, 16, 25, etcétera, se utiliza la expresión algebraica cuadrática ______.

2. Para continuar practicando con las sucesiones, encuentra una expresión algebraica que permita obtener el resultado del enésimo término. Observa las figuras y contesta lo que se te pide.



a) ¿Cómo va aumentando la medida de la base de cada figura?
- ¿En qué razón va aumentando la altura de cada figura?

b) ¿Qué relación hay entre la medida de la base de cada figura y la posición que ocupa en la sucesión?
- Si tuvieras que dibujar la figura 6, ¿cuántas unidades mediría la base?, ¿y cuantas la altura?

c) ¿Qué relación hay entre la altura y la posición que la figura ocupa en la sucesión?
- ¿Cuánto medirá su superficie?

d) Completa la tabla de la derecha.
- ¿Cómo harías para obtener el área de la figura 40?
- ¿Cómo obtendrías el área de la figura que ocupará la posición n?
- Escribe la expresión algebraica que te permita obtener el área de la figura de la posición n, A_n = ________

Figura	Base (u)	Altura (u)	Área (u²)
1	1	2	2
2	2	3	6
3	3	4	12
4	4	5	20
5			
6			
7			
8			
9			
10			

e) Comenta tus resultados con un compañero y argumenta su respuesta. En grupo, con apoyo del profesor, comprueben si la siguiente expresión es adecuada para modelar a la sucesión.

$$A_n = n(n+1)$$

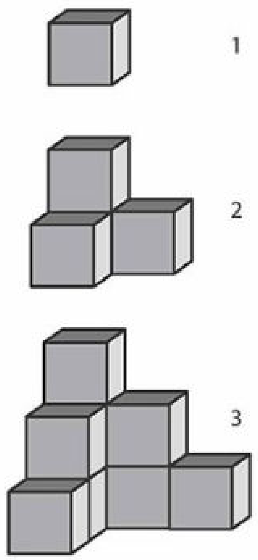
- Ahora escríbela como una expresión algebraica cuadrática.
- Comprueba si la expresión que obtuviste funciona y completa la secuencia.

0, 2, 6, 12, 20, ______, 42, ______, ______, ______, ______.

Idea matemática

Con la determinación de las relaciones que existen entre el número de la posición de la figura, el número de cuadros de la base y el número de cuadros de la altura, se puede establecer la regla general de la sucesión que se presenta, misma que corresponde a una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx$.

3. Reúnanse en parejas para resolver las siguientes actividades. Escriban las respuestas en sus cuadernos.
   a) De sus lecciones anteriores, ¿recuerdan cuál es la forma general de la ecuación cuadrática? Escríbanla.
   b) ¿Consideran que puede existir una sucesión que se genere a partir de una expresión de segundo grado como la que acaban de escribir?
4. Se tiene una sucesión de figuras formadas por cubos como la que se muestra a la izquierda, en la figura 1 se tiene un cubo, al cual se le ven solamente tres de sus caras, en la segunda figura se identifican nueve caras. Observen y/o construyan las figuras.



Respondan las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuántas caras se ven en la figura 3?
b) ¿Cuántas se verán en la figura 4?
c) ¿Cuántas en la figura 5?
d) Formen una serie con los resultados que obtuvieron y completen hasta encontrar el número que ocupa la décima posición.

3, 9, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______

e) Si la sucesión de figuras continúa en la misma forma, ¿cuántas caras es posible ver en la figura que ocupa el término 15?

f) ¿Qué harían para determinar el valor que ocupa el lugar 100 de la serie?
g) ¿Qué tan práctico resulta el método que emplearon para contestar la pregunta anterior? Coméntenlo con otra pareja.
h) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el total de caras que es posible ver en cualquier figura que esté en la sucesión?

A continuación se menciona un procedimiento alternativo al que utilizaron para determinar la expresión algebraica.

I. Encuentren la primera diferencia.
   - ¿Cuál es la diferencia entre el segundo y el primer valor de la serie?
   - ¿Cuál es la diferencia entre el tercero y el segundo valor?
   - ¿Cuál es la diferencia entre los valores que ocupan la cuarta y tercera posiciones?
   - ¿Cuál es la diferencia entre el quinto y el cuarto valor de la serie?

II. Ahora establezcan la segunda diferencia.
   - ¿Cuál es la diferencia entre los resultados obtenidos de las preguntas b) y a)?
   - ¿Cuál es la diferencia entre los resultados obtenidos de las preguntas c) y b)?
   - ¿Cuál es la diferencia entre los resultados obtenidos de las preguntas d) y la c)?
   - ¿La respuesta será la misma si continuamos con el mismo procedimiento hasta llegar a la última diferencia con los números de la sucesión?

Idea matemática

Cuando la segunda diferencia de los términos de la sucesión es constante, la expresión que genera la sucesión es una de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$.

A partir de ésta es posible obtener los valores de a, b y c para determinar la expresión precisa que permita encontrar cualquier término de una sucesión como la anterior. Consideren x como la posición que ocupa la figura o el término de la sucesión y completen la siguiente tabla.

Posición	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
Sustitución en	$a(1)^2 + b(1) + c$	$a(2)^2 + b(2) + c$	$a(3)^2 + b(3) + c$
Expresión que resulta de simplificar	$a + b + c$		
Primera diferencia		$5a + b$	
Segunda diferencia	$2a$		

5. Retomando la actividad anterior, escriban el valor numérico obtenido en la segunda diferencia de la sucesión.

a) Anoten el valor numérico de la diferencia entre el segundo y el primer valor de la sucesión del ejercicio previo.
b) Combinen las diferencias anteriores y las obtenidas en la tabla, de tal forma que:

Segunda diferencia	Primera diferencia	Expresión que resulta de simplificar con valor del primer número que compone la sucesión
$2a = 2$	$3a + b = 6$	$a + b + c = 3$

- En su cuaderno, determinen el valor de a, a partir de la primera ecuación.
- Sustituyan el valor de a en la segunda expresión y para determinar c, sustituyan los valores de a y b en la tercera expresión. Para así obtener:

$$a = \_\_\_\_\_ \quad b = \_\_\_\_\_ \text{ y } c = \_\_\_\_\_$$

- Sustituye los valores encontrados de a, b y c en la expresión $ax^2 + bx + c$. ¿Cuál es la expresión?
- Si $x = n$ es la posición enésima de una sucesión de este tipo, entonces:

$$P_x = ax^2 + bx + c, \text{ es decir, } P_x = x^2 + 3x - 1$$

Idea matemática

A esta forma en que se obtuvo la expresión algebraica que representa la sucesión se le llama *Método de Diferencias*. Para determinar los coeficientes de la expresión $ax^2 + bx + c$, hay que resolver las ecuaciones que se obtienen al considerar que:

- El doble del coeficiente es igual a la constante de las diferencias de nivel 2.
- La suma $3a + b$ es igual al primer término de las diferencias de nivel 1.
- La suma $a + b + c$ es igual al primer término de la sucesión.

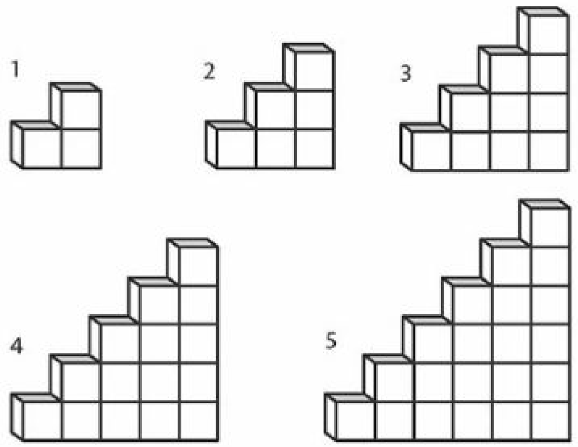
6. En su cuaderno, con respecto a las posiciones 2 y 3 de la sucesión que se trabajó anteriormente, comprueben si el valor de esos términos se determina con la expresión cuadrática.

$$P_2 = (2)^2 + 3(2) - 1 \text{ y } P_3 = (3)^2 + 3(3) - 1$$

a) ¿Cuántas caras podrían verse en la ilustración número 18 de la sucesión?
b) ¿Qué harían para conocer el número que ocupa el lugar 100 de la sucesión?
c) ¿Cuántas caras serían visibles en la ilustración 123 de la sucesión?
d) Si el número de caras que se verían en la sucesión de las ilustraciones fuera 1 053, ¿qué lugar de la sucesión ocuparía la ilustración?

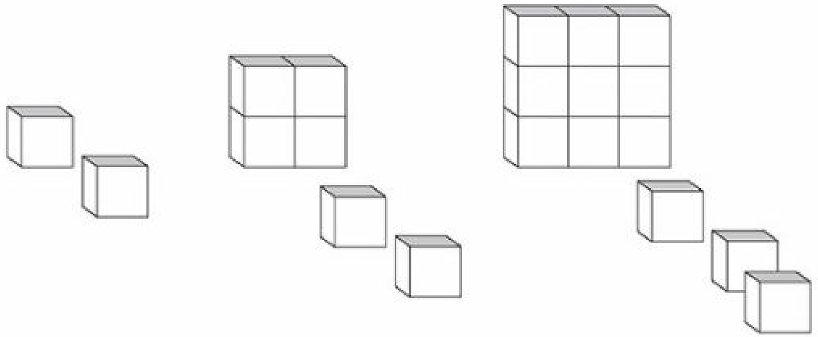
Comenten con otra pareja lo que hicieron para obtener cada una de las respuestas anteriores. Posteriormente, con ayuda del profesor y del resto del grupo, validen sus respuestas y aclaren sus dudas.

7. Con la finalidad de que apliques lo aprendido, determina la expresión algebraica que te permita encontrar el número de caras que se pueden ver en cualquier posición de la siguiente sucesión formada por cubos. Puedes apoyarte completando tablas similares a las manejadas en la actividad anterior; constrúyelas en tu cuaderno.



a) Escribe la expresión algebraica que describe la cantidad de cubos.
b) Obtén el número de caras que es posible ver en las posiciones 10, 100 y 1520.
c) Intenta simplificar el procedimiento o encontrar una estrategia que te permita resolver con mayor facilidad este tipo de ejercicios, escríbelo en tu cuaderno y compártelo con tus compañeros.

8. Obtén la expresión algebraica con la que sea posible conocer el número de cubos que se deben tener para construir cualquier figura dentro de la sucesión. Escríbela.



Posición 1 Posición 2 Posición 3

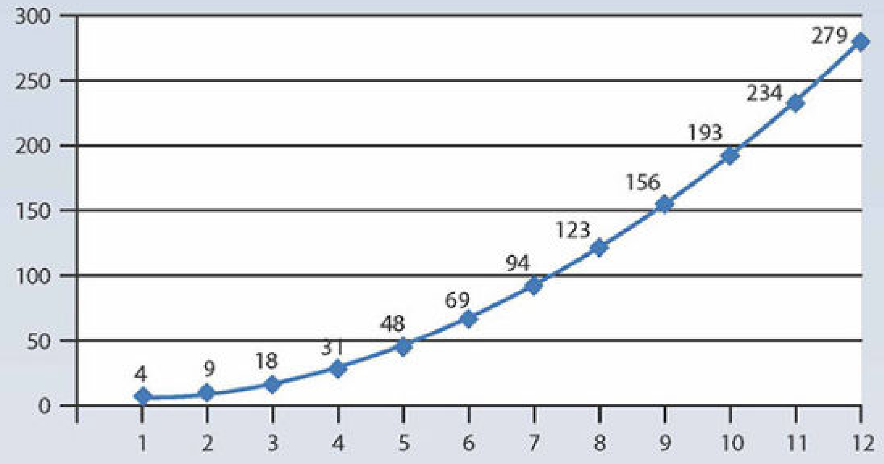
a) ¿De cuántos cubos constará la figura que ocupa la posición número 25 de la sucesión?
b) Determina la expresión que te permita continuar la sucesión 5, 12, 21, 32, 45
   - Completa la secuencia respecto a la sucesión que encontraste.
     5, 12, 21, 32, 45, _____, _____, _____, _____
   - Escribe el número que ocupa el lugar 990 de la sucesión.
     1, 6, 13, 22, 33,...
   - Escribe la expresión con la que determinaste el número anterior.
   - Completa la serie: 1, 6, 13, 22, 33, _____, _____, _____, _____

c) Compara tus planteamientos con un compañero e interpreten las ecuaciones que establecieron. Verifiquen que estén correctamente planteadas y que hayan llegado a los mismos resultados numéricos.

Al finalizar, con ayuda del profesor concluyan y aclaren las posibles dudas.

Supera el reto

Reúnanse en parejas, observen con atención la siguiente gráfica y usando el Método de Diferencias o cualquier otro que propongan, establezcan la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ que proporcione el término enésimo de la serie graficada. Compruébenlo para los valores proporcionados de la serie.



- Escriban la expresión algebraica cuadrática.
- Argumenten por qué esta expresión funciona para cualquier término de la sucesión.
- ¿Cómo le hicieron para conocer el resultado?
- ¿La serie puede tener números negativos?
- ¿Qué dificultades encontraron para resolver el ejercicio?
- ¿Qué es más práctico: aplicar algún otro método o el método de diferencias?, ¿por qué?
- ¿En dónde podría aplicarse esta serie?
- Plantea una situación donde la gráfica sea el modelo que la describa.
- Comenten con otra pareja la forma en la que resolvieron el problema, compárenlo y compartan su argumentación. Con ayuda de su profesor, concluyan sobre las ventajas de los procedimientos algebraicos y la utilización de expresiones cuadráticas.

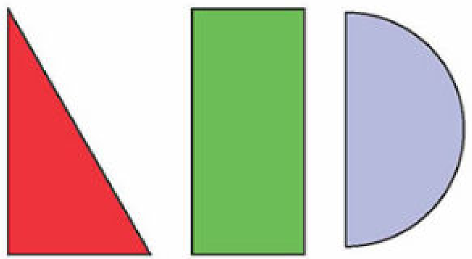
Figuras y cuerpos

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos

Lección 30. Las figuras que giran

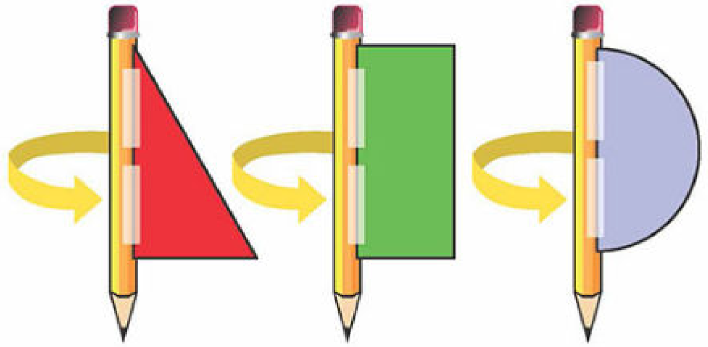
Leonardo había estado elaborando una maqueta para la clase de Historia. Toda la tarde cortó triángulos, cuadriláteros y circunferencias; los unió para formar los edificios que representaban una época muy importante de nuestra historia. Un rectángulo se pegó en un lápiz, Leonardo lo hizo girar y pensó que si éste tuviera consistencia sólida podría colocarlo en la maqueta para formar parte de los edificios que había armado. ¿Qué sólido geométrico crees que se haya formado?, ¿qué otros cuerpos se podrán formar si pega un triángulo o una circunferencia?

1. Para conocer los cuerpos que se formaron, realiza la siguiente actividad. Reúnete con un compañero. Necesitan una cartulina, lápices, regla, compás, tijeras y cinta adhesiva.

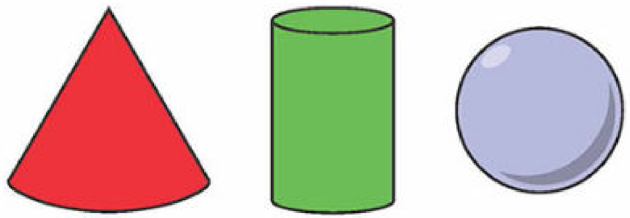


   a) En la cartulina tracen un triángulo rectángulo, un rectángulo y un semicírculo como los de la imagen.

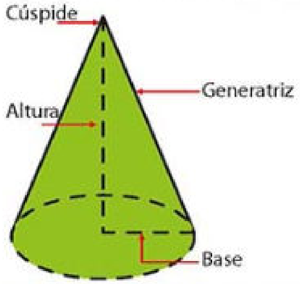
   - Peguen las figuras geométricas con la cinta adhesiva al lápiz como se ilustra.



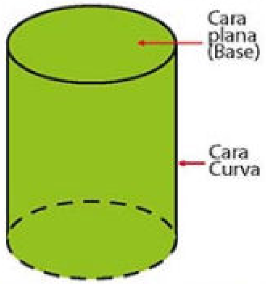
   - Den vuelta al lápiz rápidamente hasta ver alguno de los sólidos.
   - ¿Qué sólido se visualizará con el triángulo rectángulo?
   - ¿Cuál sólido se formará con el rectángulo?
   - ¿Qué sólido será visible con el semicírculo?
   - ¿Se parecen estos sólidos a los que imaginaste?



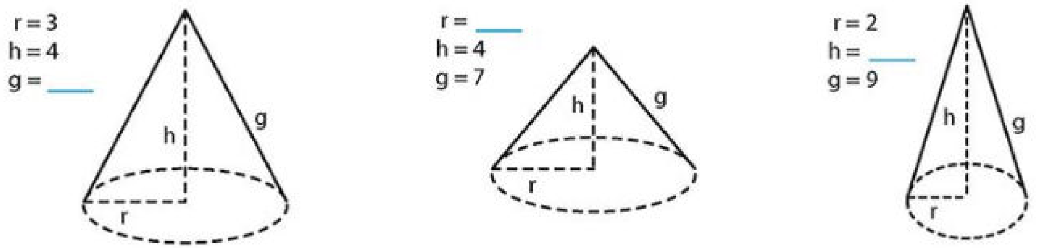
Idea matemática



El cono es un sólido geométrico que se forma por la revolución completa de un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos y cuya generatriz es la hipotenusa.
Este cuerpo se conoce como *sólido de revolución.*



2. Formen equipos y resuelvan los siguientes problemas.
   a) Usando el teorema de Pitágoras, calculen la longitud del elemento que falta en cada uno de los conos.



   b) Determinen la longitud de la generatriz de un cono cuya área de la base es 78.5 cm^2 y su altura es de 12 cm.
      - Si la generatriz de un recipiente de forma cónica mide 8 cm y su radio 3 cm, ¿cuál es su altura?
      - Localicen en su casa objetos que tengan forma de cono.

Supera el reto

Traza un círculo. Realiza una pequeña perforación en el centro y pasa por ella una aguja. Apoya en una superficie plana la aguja en posición horizontal y haz girar el círculo hacia abajo.

¿Cuál será el cuerpo geométrico que se visualiza al deslizar el círculo en la aguja? Dibújalo.

Explora

Visita la página: http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/110919_conos.elp/cuerpos_de_revolucin.html Realiza la actividad que se sugiere para que conozcas diferentes cuerpos de revolución y profundices en el tema. (Consulta: 23 de enero de 2017).

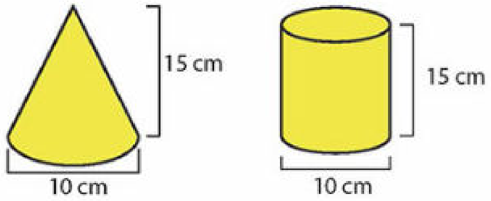
Figuras y cuerpos

Lección 31. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos

Rafael y Mario asistirán a la fiesta de quince años de su compañera Mónica. Han decidido que las cajas en las que lleven sus regalos sean completamente diferentes; para ello construirán un cono y un cilindro; además, no quieren desperdiciar papel fantasía al forrarlas.

1. ¿Qué les sugerirías hacer para construir el cono y el cilindro?

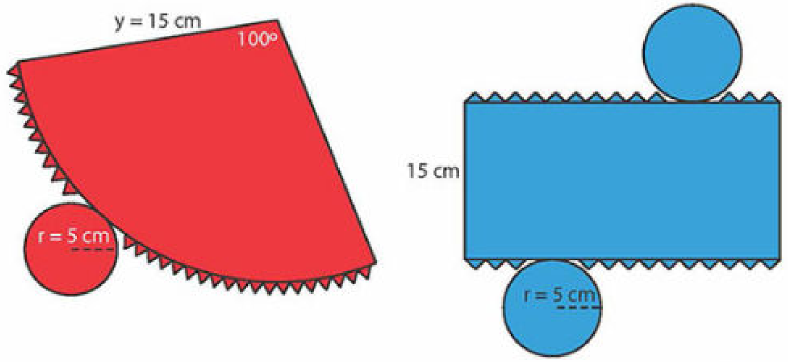
   a) Rafael y Mario decidieron que tanto el cono como el cilindro tengan 10 cm de ancho por 15 cm de altura. ¿Qué otras medidas necesitan para construir el desarrollo plano de las figuras?
      - Además de la generatriz, ¿qué datos necesitan saber para trazar el sector circular que será la cara lateral del cono?
      - Recuerda que para calcular la generatriz del cono se puede usar el teorema de Pitágoras. ¿Cuánto mide la generatriz del cono?
      - ¿Qué otra medida hace falta para construir el cono?
      - ¿Qué parte de la circunferencia de radio 18 cm tendrá la misma longitud que la circunferencia de radio 5 cm?
      - Una forma de obtener la medida del arco de la circunferencia de radio 18 es usando una proporción; si resolvemos la proporción, obtenemos el valor de x de la siguiente manera.



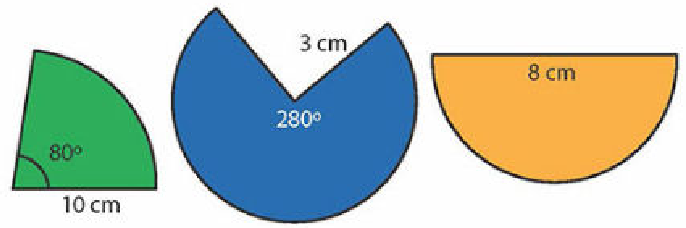
$$\frac{36\pi}{360°} = \frac{10\pi}{x}$$

      - ¿Cuánto mide x?
      - Ahora ya puedes construir el cono. Hazlo con un pedazo de cartulina.

   b) Para construir el cilindro, ¿qué más se requiere?
      - Ya sabemos que el radio de la circunferencia que nos servirá de base mide la mitad del diámetro, es decir, ______________. ¿Qué necesitamos hacer para conocer el ancho del rectángulo que será la cara lateral del cilindro?
      - ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que será la cara lateral del cilindro?
      - ¿Se parecen estos desarrollos planos a los que construiste?

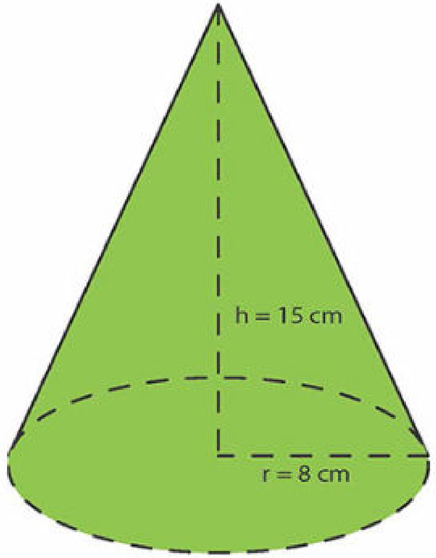


2. Reproduce en cartulina los siguientes desarrollos de conos y cilindros. Ármalos.



a) ¿Cuánto mide la altura de cada uno?
   - ¿Es posible conocer este dato a partir de su desarrollo plano?
   - ¿Cuánto mide la circunferencia de la base?
   - ¿Esta información puede obtenerse directamente del desarrollo plano?

3. Verifica si las medidas marcadas en el esquema son realmente las del sólido.



Supera el reto

El silo

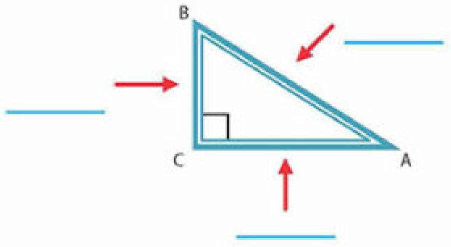
Los silos son almacenes para granos; algunos tienen forma de cono. Un silo como el de la imagen mide 8 m de diámetro y de la punta del silo al piso mide 15 m. ¿Cuánto medirá la altura del silo? Investiga cómo podemos saber cuántos kilogramos de grano es posible almacenar en él; para ello, recuerda también que es necesario saber a cuántos kilogramos equivale cada metro cúbico.

Medida

Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente

Lección 32. La pendiente como ángulo que se forma con la abscisa y como cociente de catetos

En las lecciones anteriores trabajaste con triángulos rectángulos y con el teorema de Pitágoras, ¿recuerdas cómo se llaman los elementos que intervienen en él? Coméntalo en forma grupal con tus compañeros y profesor. Copien en sus cuadernos el siguiente diagrama y escriban el nombre de cada lado del triángulo.

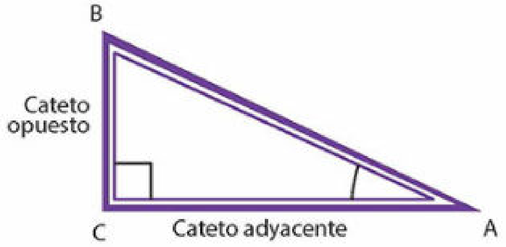


Escribe el nombre que recibe cada ángulo del triángulo de acuerdo con su medida.

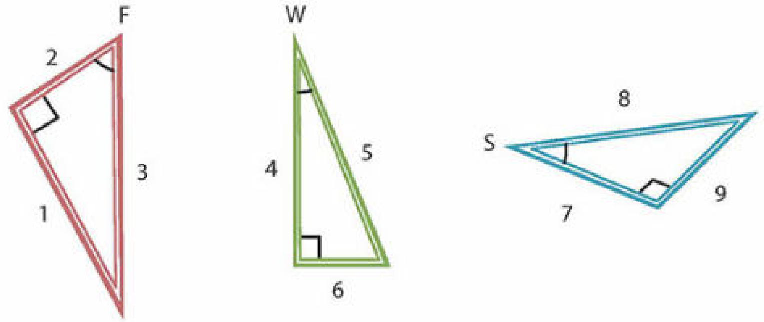
A = ____________ B = ____________ C = ____________

Idea matemática

Dependiendo del ángulo agudo que se elija en el triángulo rectángulo, los catetos reciben diferentes nombres. De acuerdo con el ángulo A, se tiene el siguiente esquema.



1. Escribe el nombre a los catetos en relación con el ángulo indicado.

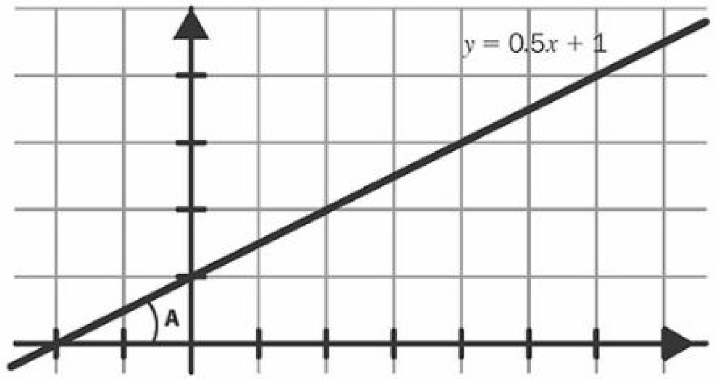


Ángulo F	Ángulo W	Ángulo S
1. ____________	4. ____________	7. ____________
2. ____________	5. ____________	8. ____________
3. ____________	6. ____________	9. ____________

2. Define con tus palabras al cateto opuesto y al adyacente.
   Comparte y verifica tus respuestas con algún compañero.

3. Por parejas, consideren la gráfica de la recta $y = 0.5x + 1$ y realicen lo que se pide.

   a) En la ecuación de la recta, ¿qué nombre recibe el 0.5?



   b) Construyan tres triángulos rectángulos sobre la gráfica, considerando la recta y el eje de las abscisas.
   c) El ángulo A es común a los tres triángulos. Identifiquen y midan los catetos opuestos y adyacentes al ángulo A en cada triángulo y escriban las medidas en ellos.
   d) Obtengan los cocientes de las razones formadas por el cateto opuesto entre el adyacente y anótenlas en la tabla.

	Triángulo 1	Triángulo 2	Triángulo 3
Razón	$\frac{\text{(cateto opuesto)}}{\text{(cateto adyacente)}} = \frac{\square}{\square}$	$\frac{\text{(cateto opuesto)}}{\text{(cateto adyacente)}} = \frac{\square}{\square}$	$\frac{\text{(cateto opuesto)}}{\text{(cateto adyacente)}} = \frac{\square}{\square}$
Cociente			

- ¿Cómo son todos los cocientes entre sí?
- Verifiquen que los cocientes obtenidos son iguales. En forma grupal, con ayuda del profesor, expliquen por qué.
- Observen la ecuación de la recta graficada, ¿qué relación existe entre la pendiente y los cocientes de los catetos?
- Discutan en forma grupal si ocurrirá lo mismo en todos los casos para la pendiente y el cociente de los catetos. Establezcan conclusiones al respecto.

Idea matemática

La razón entre los catetos de los triángulos formados entre la recta y el **eje de las abscisas** es la pendiente de la recta. A esta razón (cateto opuesto entre cateto adyacente) se le llama tangente y su abreviatura es *tan*.

$$\frac{\text{(cateto opuesto)}}{\text{(cateto adyacente)}} = \tan,$$

Es decir, la tangente es igual a la pendiente de una recta.

Palabra pi

eje de las abscisas. Es el eje horizontal de un sistema de coordenadas cartesianas, también es llamado eje de las "x".

   e) Determinen la medida del ángulo A que se forma con el eje x y la recta.
   - Describan brevemente la forma como obtuvieron el ángulo anterior.
   - Para comprobar la medida que obtuvieron del ángulo, lean la siguiente cápsula, en la que se desarrolla otra forma para determinar esta medida.

Idea matemática

Una vez que se conoce el valor de la tangente (cateto opuesto entre cateto adyacente), por medio de una calculadora se puede determinar el valor del ángulo cuya tangente tenga ese valor.

- Oprime la tecla Shift (en algunas calculadoras aparece como INV o 2ndF)
- Enseguida la tecla de la tangente, marcada como *tan*
- Anota su valor; en este caso, 0.5
- Oprime el signo =

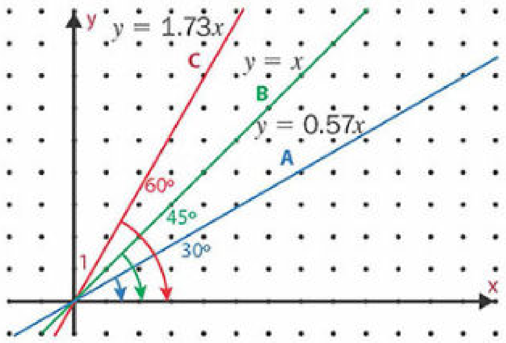
En la pantalla aparecerá 26.56505118 que son los grados que mide el ángulo A, pero recuerda que debe ser convertido a unidades sexagesimales, por lo que, en la calculadora:

- Oprime la tecla "de grados, minutos y segundos" $\boxed{\circ\ '\ ''}$ y directo se obtiene 26°33'54.18" que se lee como 26 grados, 33 minutos, 54.18 segundos; por lo que el ángulo A mide 26° 33' 54.18".

4. Para practicar la obtención de la medida de un ángulo a partir del valor de la tangente por medio de la calculadora, escriban el ángulo que corresponde en cada caso.

$\tan R = 2.1446$ R = ______	$\tan A = 0.6248$ A = ______
$\tan M = 0.2599$ M = ______	$\tan Z = 0.5614$ Z = ______

5. Con la finalidad de que analices la relación entre la medida del ángulo y el valor de la pendiente en diferentes rectas, considera las gráficas de las rectas correspondientes con los ángulos de 30º, 45º y 60º. Copia en tu cuaderno la gráfica y forma un triángulo rectángulo para cada ángulo; trázalo con distinto color sobre la gráfica, puedes hacer uso del juego de geometría.



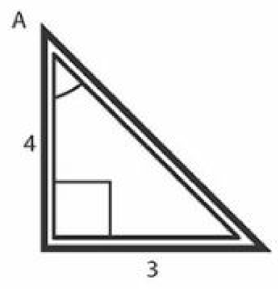
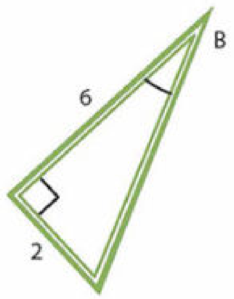
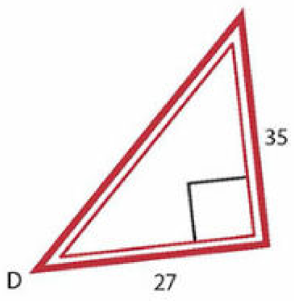
a) Completa la tabla y contesta las preguntas, puedes usar tu calculadora.

Ángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Razón $\left(\frac{\text{C. Opuesto}}{\text{C. Adyacente}}\right)$	Cociente (decimal)	Pendiente
30º					
45º					
60º					

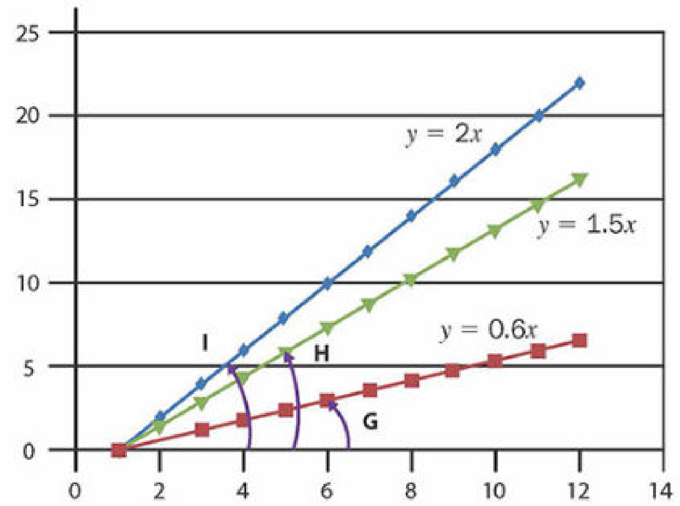
- Compara tu tabla con la elaborada por al menos dos compañeros más.
- Verifiquen ¿los datos de las tres primeras columnas son iguales o diferentes?
- ¿Los de las dos últimas coinciden? Expliquen por qué.
- ¿Sucederá lo mismo con otros ángulos? Compruébenlo y concluyan.

Con ayuda de su profesor, validen sus respuestas y aclaren sus dudas.

6. Con el objetivo de que apliques lo aprendido, determina el valor de la tangente del ángulo en cada uno de los siguientes triángulos. Posteriormente, define la medida del ángulo con apoyo de tu calculadora.

		
tan A =	*tan* B =	*tan* D =
A = ________	B = ________	D = ________

7. A partir de las ecuaciones de las gráficas siguientes, establece el valor del ángulo que determinan.



Describe brevemente la forma en la que obtuviste el valor de los ángulos anteriores.

8. Traza las gráficas correspondientes a las siguientes ecuaciones.

a) $y = 0.7x + 1$ b) $y = x + 3$ c) $y = 5x$

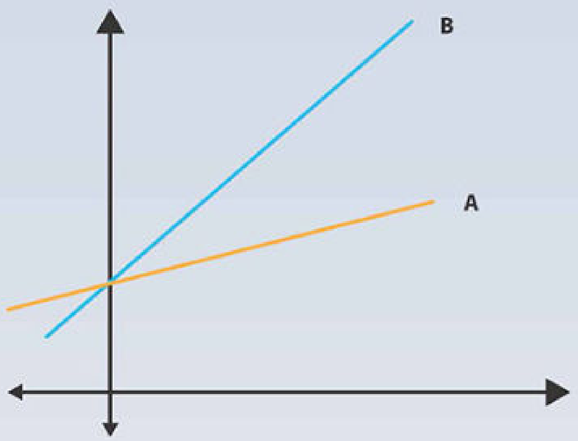
- Marca y numera el ángulo que se forma entre la recta y el eje de las abscisas o una paralela a esta en cada caso. Completa la tabla.

Ángulo	Medida del ángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Razón $\left(\frac{\text{C. Opuesto}}{\text{C. Adyacente}}\right)$	Cociente (decimal)	Pendiente
1						
2						
3						

- Comenta, ¿qué valor tomaste en cuenta para determinar el valor del ángulo?
- Compara tus planteamientos y respuestas con un compañero. Verifiquen que estén correctamente planteados y que hayan llegado a los mismos resultados numéricos. Al finalizar, con ayuda del profesor concluyan y aclaren las posibles dudas.

Supera el reto

Organizados en parejas, observen con atención la gráfica y contesten las preguntas planteadas.



a) ¿Cuál de las dos rectas tiene la pendiente mayor?, ¿por qué?

b) ¿Cuál de las dos rectas forma el ángulo mayor con la recta y el eje de las abscisas o una paralela a él? Describan brevemente cómo pudieron saberlo.

- ¿Qué dificultades encontraron para resolver el ejercicio?

c) ¿Qué valor se debe tomar en cuenta para determinar el valor de la tangente a partir de la ecuación de una recta?

- ¿Qué lados del triángulo se deben conocer para determinar el valor de la tangente?

Comenten con otra pareja la forma en la que resolvieron el problema, compárenlo y compartan su argumentación. Con apoyo del profesor, concluyan las ventajas que tiene en la vida cotidiana utilizar la pendiente y la tangente.

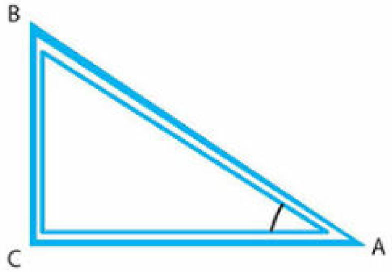
Explora

Para que puedas observar gráficamente los conocimientos adquiridos en la lección sobre la pendiente y la tangente, entra al sitio: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/Descartes1/Bach_CNST_1/Geometria_afin_analitica_plano_lugares_geometricos/Geometria6.htm; (Consulta: 23 de junio de 2013). Practica con los ejercicios 1 y 2. Comenta la experiencia con un compañero y compartan los resultados que obtuvieron.

Medida

Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

Lección 33. Relación entre los ángulos agudos y los cocientes de los lados de un triángulo rectángulo



Recuerda que cuando se tiene un triángulo rectángulo, sus lados reciben el nombre de catetos e hipotenusa. Si se toma como base el ángulo A en el siguiente triángulo, comenten en parejas qué nombre reciben los segmentos BC, CA y BA; y escríbanlos en su cuaderno.

En grupo y con ayuda de su maestro, cuestionen qué se entiende por cateto opuesto y cateto adyacente a un ángulo, o bien, entre todos dedúzcanlo. Los lados del triángulo rectángulo se pueden relacionar entre sí, ¿recuerdan qué nombre recibe el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente?

En esta lección estudiarán otras dos relaciones entre los lados del triángulo rectángulo donde ya interviene la hipotenusa, y aunque existen más, por ahora sólo se trabajará con éstas.

Idea matemática

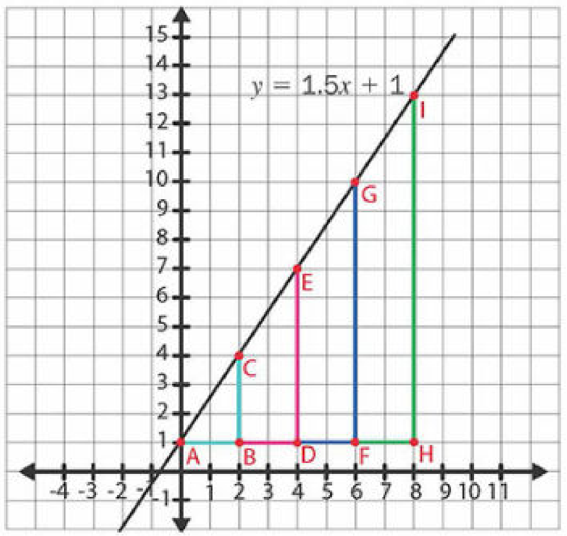
A la razón del cateto opuesto con la hipotenusa se le llama seno. Su abreviatura es *sen*.

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \text{sen}$$

A la razón del cateto adyacente entre la hipotenusa se le llama coseno. Su abreviatura es *cos*.

$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \cos$$

1. Organizados en parejas, y a partir de la gráfica de la recta $y = 1.5x + 1$, respondan lo que se pide.



a) ¿Qué tipo de triángulos se formaron al trazar paralelas al **eje de las ordenadas**?

b) Para el triángulo AFG, y tomando como referencia al ángulo A, ¿qué nombre reciben los lados FG y AG?

- Escriban la medida del lado FG = ________________
- ¿Cómo pueden determinar el valor de la hipotenusa?, coméntenlo y obtengan dicho valor. Hipotenusa = ________________
- Si se conoce la medida de los lados, ¿se podría obtener el valor del ángulo A?
- Comenten una forma por medio de la cual se puede calcular la medida del ángulo A. Y aplíquenla para obtener ese valor.

Palabra pi

eje de las ordenadas. Es el eje vertical de un sistema de coordenadas cartesianas. También es llamado eje de las "y".

Para comprobar la medida que obtuvieron del ángulo, lean la siguiente cápsula, en la que se explica otra forma para determinar esta medida, ya la habían utilizado pero aplicando la tangente.

Idea matemática

Una vez que ya se conoce el cociente determinado por el cateto opuesto y la hipotenusa, es decir, el valor del seno de un ángulo, es posible obtener el valor de dicho ángulo por medio de una calculadora:

- Oprime la tecla Shift (en algunas calculadoras aparece como INV o 2ndF)
- Enseguida oprime la tecla del seno, marcada como sin, puesto que está en inglés
- Posteriormente anota el valor del seno. En el caso anterior sería 0.8576
- Oprime el signo de =

En la pantalla aparecerá 59.05183865, que son los grados que mide el ángulo A, pero recuerda que debe ser convertido a unidades sexagesimales, por lo que en la calculadora se hace la conversión.

- Oprime la tecla [° ' "] y directo se obtiene 59°3′6.6″ que se lee como 59 grados, 3 minutos, 6.6 segundos y que representa la medida del ángulo A.

2. Tomen los datos necesarios de la gráfica anterior y completen la siguiente tabla. Utilicen su calculadora y consideren el redondeo hasta diezmilésimos en los cálculos y resultados.

Triángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Medida de la hipotenusa	Razón Seno $\left(\frac{\text{C. Opuesto}}{\text{hipotenusa}}\right)$	Razón Coseno $\left(\frac{\text{C. Adyacente}}{\text{hipotenusa}}\right)$
ABC					
ADE					
AFG					
AHI					

a) ¿Cómo fue el resultado de la razón seno en los cuatro triángulos?

A la razón coseno le debe ocurrir algo similar, lo que pasa es que, por el redondeo, a lo mejor se ve un poco de diferencia en las primeras cifras, sin embargo el valor es constante.

- ¿A qué creen que se deba que tanto en la razón seno como en la razón coseno, ocurra esto?
- Lee el siguiente cuadro y completa.

Los triángulos con los que trabajaron en la gráfica anterior, son semejantes. ¿Recuerdas que propiedades cumplen este tipo de triángulos? ________________ y ________________
A esto se debe que todos los cocientes que resultan de dividir, por ejemplo, el cateto opuesto entre la hipotenusa son constantes. Esto mismo sucede con otras razones.

3. Con una calculadora científica, determinen el valor del ángulo A, a partir de la función seno o a partir de la función coseno, tomando como base los cocientes obtenidos en la tabla anterior, y que rescribirán aquí. Redondeen la medida del ángulo a grados.

Triángulo	Razón Seno $\left(\frac{\text{C. Opuesto}}{\text{hipotenusa}}\right)$	Medida del ángulo A	Razón Coseno $\left(\frac{\text{C. Adyacente}}{\text{hipotenusa}}\right)$	Medida del ángulo A
ABC				
ADE				
AFG				
AHI				

- ¿Los resultados obtenidos coinciden con el ángulo de inclinación de la recta?, ¿por qué?

4. Con la finalidad de que practiquen el uso de la calculadora, obtengan la medida de un ángulo a partir del valor del seno o del coseno, escriban el valor del ángulo que corresponde en cada caso.

sen M = 0.5000	*cos* E = 0.5000
M = ______	E = ______
sen F = 0.9511	*cos* W = 0.9511
F = ______	W = ______

a) Con base en la tabla anterior responde lo que se te pide a continuación.

- ¿Cuánto suma el ángulo M más el ángulo E?
- ¿Qué nombre reciben este tipo de ángulos?
- ¿Cómo son los valores del seno y del coseno de estos ángulos?
- ¿Cómo son los valores del seno y coseno de los ángulos F y W?
- ¿Cómo son entre sí los ángulos F y W?

Comparte tus resultados con un compañero y establezcan una conclusión a partir de los valores del seno y coseno de ángulos complementarios. Comprueben su conclusión con otras parejas de ángulos.

El seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento.

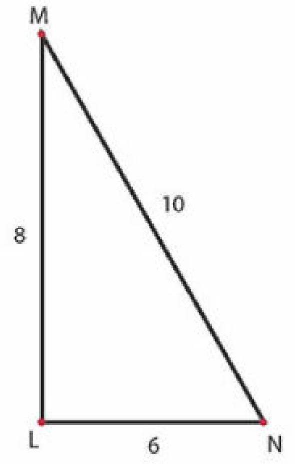
sen 54° = 0.8090 es igual a *cos* 36° = 0.8090

Compruébalo con tu calculadora.

5. Organizados en equipos, contesten lo que se plantea en referencia al triángulo rectángulo mostrado en la figura.

a) ¿Cuánto suman los ángulos M y N del triángulo rectángulo?

b) ¿Qué nombre reciben esos ángulos?



c) Obtengan las siguientes razones de los ángulos agudos del triángulo rectángulo.

sen M = *sen* N =
cos M = *cos* N =
tan M = *tan* N =

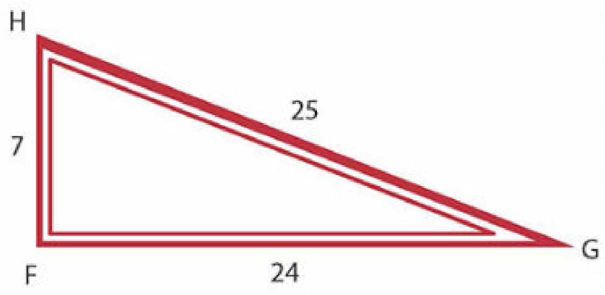
d) ¿Qué relación existe entre el seno de un ángulo y el coseno de su complemento?
e) Si el seno de un ángulo de 80 grados es igual a 0.9848, ¿a qué es igual el coseno de un ángulo de 10 grados?
f) ¿Se cumple la conclusión que obtuvieron anteriormente, para los ángulos complementarios del triángulo rectángulo?
g) ¿A qué es igual el producto de la tangente de un ángulo M por la tangente de un ángulo de N, si este es su complementario?

Concluyan en forma grupal, con ayuda de su maestro, a qué es igual el producto de la tangente de un ángulo por la tangente de su complemento.

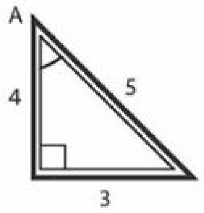
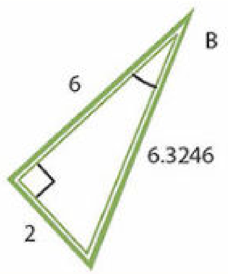
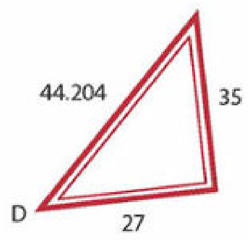
Idea matemática

La tangente de un ángulo es inversa multiplicativa a la tangente de su complemento, por lo tanto, el resultado es uno.

tan G = $\frac{7}{24}$ tan H = $\frac{24}{7}$



6. Con la finalidad de que apliques lo aprendido, determina el valor del seno del ángulo indicado en cada uno de los siguientes triángulos. Posteriormente, define con ayuda de tu calculadora la medida del ángulo.

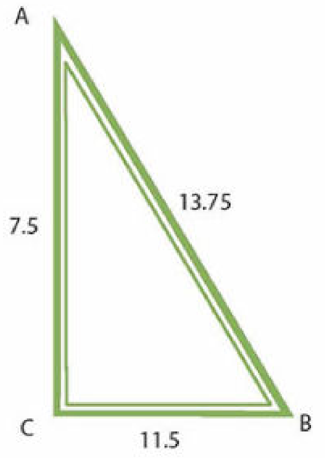
		
sen A =	*sen B* =	*sen D* =
A = ______	B = ______	D = ______

7. Completa las afirmaciones siguientes, sin utilizar la calculadora.

- Si *sen* 26° = 0.4384, el *cos* ______ = 0.4384
- Si *cos* 2° = 0.9994, el *sen* ______ = 0.9994
- Si *cos* 66° = 0.4067 , el *sen* de 24° = ______
- Si W y Z son ángulos agudos interiores de un triángulo rectángulo, ¿cuánto vale la tangente de Z si se conoce la de W?

$$\tan W = \frac{8}{10}, \qquad \tan Z =$$

8. Escribe las razones trigonométricas *sen*, *cos* y *tan* de los ángulos interiores del siguiente triángulo rectángulo y une con una línea las que sean iguales.



sen A = *sen* B =

cos A = *cos* B =

tan A = *tan* B =

9. Obtén el valor del ángulo a partir de la función trigonométrica que elijas.

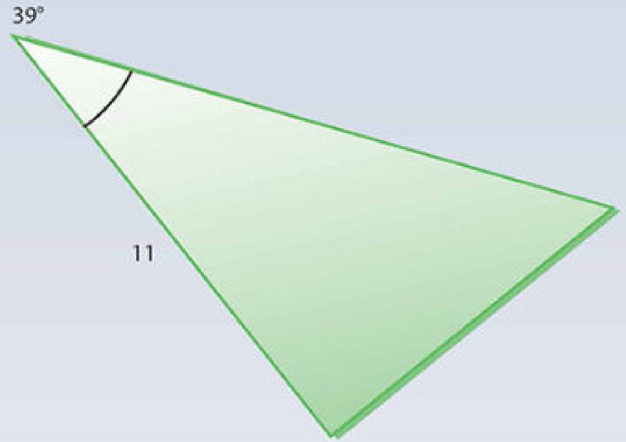
Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Medida de la hipotenusa	Razón utilizada	Cociente (decimal)	Medida del ángulo
6.7		7			
	1	2.2			
4	2.34				

a) Comenten por parejas el valor de los ángulos obtenidos y qué función trigonométrica tomaron en cuenta para determinar el valor del ángulo.
   - Compara con un compañero tus planteamientos y respuestas.
   - Verifiquen que estén correctamente planteados y que hayan llegado a los mismos resultados numéricos.

Al finalizar con ayuda del profesor concluyan y aclaren las posibles dudas.

Supera el reto

Reúnanse en parejas, y a partir de los datos proporcionados en el triángulo rectángulo, contesten las preguntas que se plantean.



a) ¿Cuál es la razón que representa el seno de 39°?
b) ¿Cuál es el valor del coseno del complemento de 39°?
   - Describan brevemente: ¿cómo lograron saberlo?
c) ¿Cuál es la razón que corresponde a la tangente del complemento de 39°?
d) ¿Por cuál número tienen que multiplicar el valor obtenido en el inciso anterior para que el resultado sea uno?
   - Este valor representa a la tangente de...
e) ¿Qué dificultades encontraron para resolver el ejercicio?
f) ¿Ahora cuántas funciones trigonométricas manejan que les permiten resolver los triángulos?, ¿cuáles son?

Comenten con otra pareja la forma en que resolvieron el problema, compárenlo y compartan su argumentación, con ayuda de su profesor concluyan las ventajas de utilizar las funciones trigonométricas de ángulos complementarios.

Explora

Para que puedas ver y comprobar gráficamente los conocimientos adquiridos en la lección sobre el seno y el coseno de ángulos complementarios, así como la multiplicación de la tangente de un ángulo por la tangente de su complementario, entra al sitio:

http://www.catedu.es/cnice/descartes/Esp/4b_eso/Razones_trigonometricas/Relacion_razones_trigonometricas.htm#ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS (Consulta: 30 de abril de 2013).

Practica en el ejercicio 1 encontrado en la página, sobre ángulos complementarios. Comenta con un compañero la experiencia y compartan los resultados que obtuvieron.

Medida

Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

Lección 34. Razones trigonométricas seno, coseno y tangente

Hasta ahora, tomando en cuenta lo revisado en lecciones anteriores, ¿cuántas funciones trigonométricas conoces? ¿Cuáles son?

Relaciona ambas columnas, uniendo con una línea la respuesta correcta. Verifica tus respuestas con un compañero.

Seno	Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa
Coseno	Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente
Tangente	Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa

Idea matemática

Al seno, al coseno y a la tangente se les llaman **razones trigonométricas** y pueden expresarse como fracciones o bien como número decimal, por ejemplo:

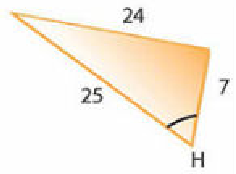
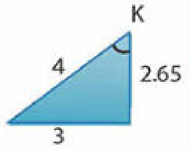
$$sen\,A = \frac{1}{2} \text{ ó } sen\,A = 0.5$$

Palabra pi

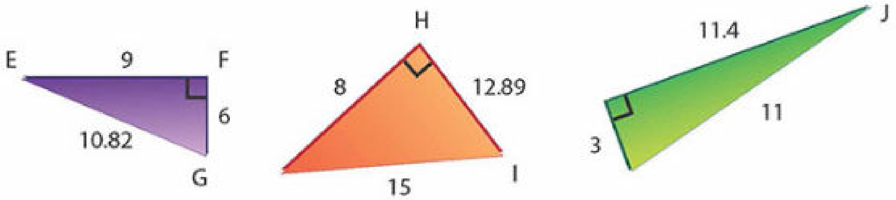
razón. Es una comparación entre dos cantidades de la misma especie.

razón trigonométrica. Es el resultado de la comparación por cociente de las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo.

1. A partir de los siguientes triángulos, calcula las razones trigonométricas de cada uno de los ángulos indicados.

	*sen* H =	*cos* H =	*tan* H =
cos K =	*tan* K =	*sen* K =	

2. Escribe el nombre de la razón trigonométrica expresada en cada uno de los triángulos.



Del ángulo E	Del ángulo I	Del ángulo J	Del ángulo G
$\frac{6}{9} =$	$\frac{8}{15} =$	$\frac{3}{11.4} =$	$\frac{12.89}{9} =$
$\frac{9}{10.82} =$	$\frac{12.89}{15} =$	$\frac{3}{11} =$	$\frac{8}{15} =$

Comprueba tus respuestas con un compañero y argumenten el porqué de las mismas.

Supera el reto

Organizados en parejas, contesten las preguntas con base en el ejercicio anterior.

a) Con respecto al ángulo E, ¿cuál es la razón trigonométrica que falta indicar?
b) ¿Qué lados del triángulo se relacionan con la razón anterior?
c) ¿Existirán otras formas de relacionar los lados del triángulo? Escriban una razón, diferente a la que conocen, que relacione al cateto opuesto con la hipotenusa.

Comenten sus respuestas en forma grupal y formulen conclusiones con ayuda de su profesor.

Idea matemática

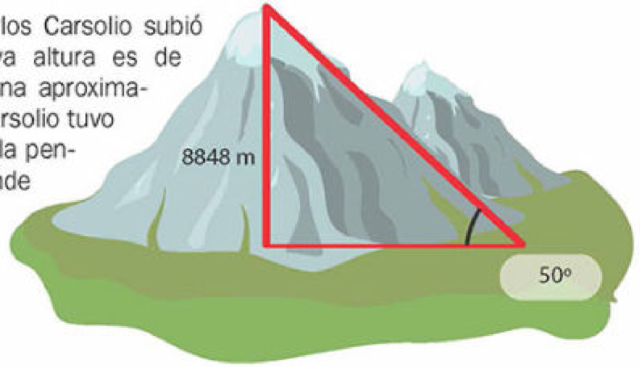
El seno, el coseno y la tangente no son las únicas relaciones que hay entre los lados de un triángulo rectángulo, ya que también existen sus inversas.

Del $sen\,A = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	la inversa es la cosecante, $csc\,A = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$
Del $cos\,A = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	la inversa es la secante, $sec\,A = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$
De la $tan\,A = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	la inversa es la cotangente, $cot\,A = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$

Sin embargo, por el momento sólo estudiaremos las tres primeras: seno, coseno y tangente.

3. Forma equipo con otros dos compañeros, lean con atención y resuelvan.

El alpinista mexicano Carlos Carsolio subió la montaña Everest, cuya altura es de 8848 m. Para obtener una aproximación de los metros que Carsolio tuvo que escalar, se sabe que la pendiente o inclinación por donde ascendió tiene un ángulo de elevación de 50°. La figura que se formó se muestra en la imagen.



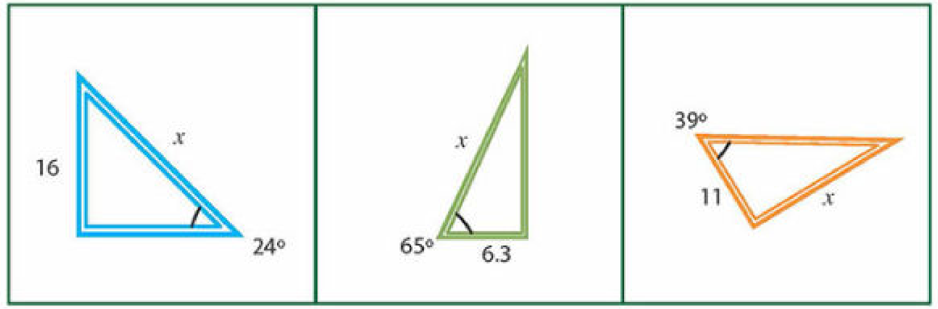
a) Si se toma el ángulo de 50° como referencia, ¿qué cateto se conoce?
   - ¿Cómo se llama el lado del triángulo por donde escalaría Carsolio?
   - ¿Cuál es la razón trigonométrica que relaciona en el triángulo los dos lados anteriores?
   - Escriban a qué es igual la razón trigonométrica *sen* 50°.

b) Si lo que se requiere es determinar el valor de la hipotenusa (x) con los datos que se tienen, es necesario saber el valor del seno de 50°, para lo cual, como en las lecciones anteriores, se utilizará una calculadora científica.

$$sen\ 50° =$$

   - Sustituyendo en la razón original ____ $= \frac{3848}{x}$
   - Despejen x en su cuaderno y escriban su valor.
   - Con la información anterior, ¿cuál es la distancia que asciende Carsolio?

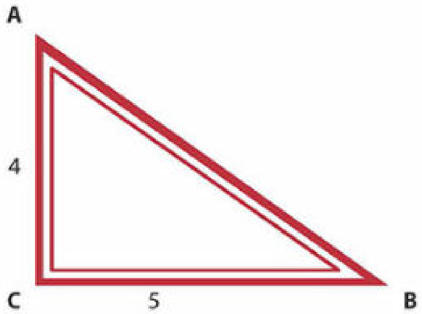
4. A partir de los triángulos siguientes, determinen en su cuaderno el valor del lado indicado y escríbanlo.



$x =$ ________ $x =$ ________ $x =$ ________

5. Analicen el siguiente problema en el que tendrán que calcular el valor del ángulo A del triángulo rectángulo.

   a) ¿Cuánto vale el cateto opuesto al ángulo A?
   b) ¿Cuánto vale el cateto adyacente?
   c) ¿Qué razón trigonométrica se puede utilizar si se tienen esos datos?



Por las respuestas anteriores tenemos que $tan\ A = \frac{5}{4}$. Observen que ya se conoce el valor de la razón trigonométrica, que en este caso es 1.5; lo que se debe encontrar es el valor del ángulo A.

   d) ¿Cómo podrían hacerlo?

Coméntenlo entre ustedes y con otro equipo, intenten resolverlo y verifiquen en forma grupal el resultado.

Idea matemática

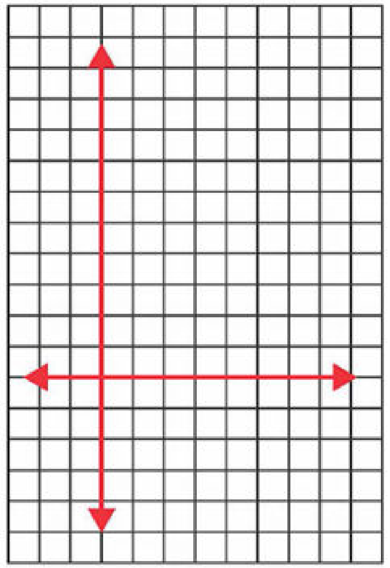
Para determinar el valor del ángulo utilizando la calculadora, una vez que se conoce el valor de la razón trigonométrica, por ejemplo $sen\ R = \frac{7}{11}$, es necesario:

- Oprimir la tecla Shift (en algunas calculadoras aparece como INV o 2ndF)
- Enseguida, la tecla de la razón trigonométrica que se está usando, para el ejemplo es *sen*
- Teclear el valor de la función que se conoce, es decir, $\frac{7}{11}$
- Al presionar el signo de =, aparecerá el valor del ángulo igual a 39.52119636

Oprimir la tecla que tenga los símbolos ° ' " para que se conviertan a grados y minutos, pues la medida de los ángulos es en sistema sexagesimal, obteniéndose así 39°31´16.31´ que es la medida del ángulo R.

6. Con la finalidad de que apliques lo aprendido, calcula las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.
   a) Del ángulo cuyo lado terminal está en el punto M (4,3), después de haberlo localizado en el plano cartesiano.

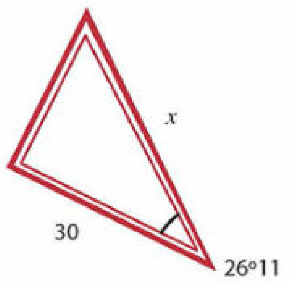
sen M =
cos M =
tan M =

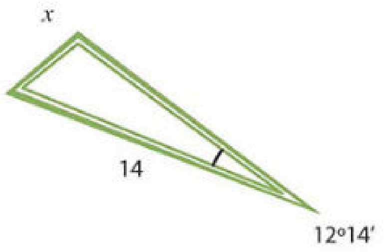


   b) Traza en tu cuaderno el triángulo que se genera con las coordenadas A(−2,5), G(6,5) y N(−2,−4). Determina las funciones trigonométricas del ángulo G.

sen G =
cos G =
tan G =

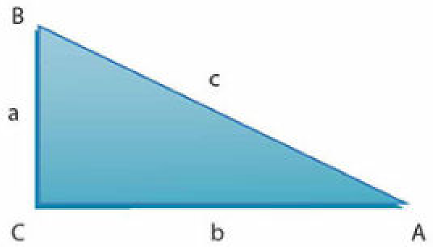
7. Encuentra el valor solicitado en cada uno de los triángulos.





x = ____________ x = ____________

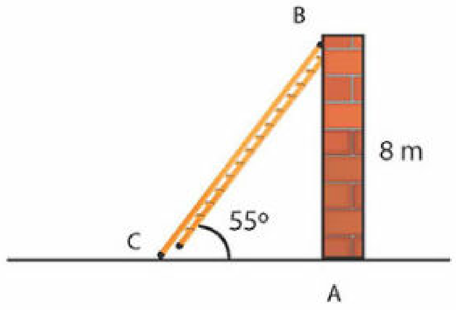
8. Calcula las medidas que se piden a partir de los datos que se proporcionan en cada caso para el siguiente triángulo.



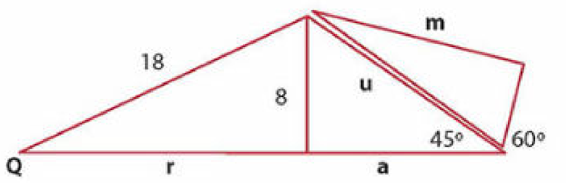
Datos c = 20 m, A = 30°	Datos a = 36 cm, A = 12°10´	Datos a = 425 cm, B= 86°23´
B = ____________	B = ____________	A = ____________
a = ____________	c = ____________	c = ____________
b = ____________	b = ____________	b = ____________

- Intenta simplificar el procedimiento o encuentra una estrategia que te permita resolver con mayor facilidad este tipo de ejercicios; escríbelo en tu cuaderno y compártelo con tus compañeros.

9. Resuelve el siguiente problema.
   a) Una escalera está recargada en lo alto de un muro que mide 8 m, formando con el ras del piso un ángulo de 55°; ¿cuáles son las longitudes de la escalera y de la distancia AC?



b) Obtén el valor de las incógnitas indicadas en la figura, aplicando la función trigonométrica que requieras.



m = ________ a = ________ r = ________ u = ________ Q = ________

Compara tus respuestas con un compañero y compartan los diversos procedimientos que se pueden utilizar para resolverlos. Verifiquen que sean correctos. Establezcan conclusiones y aclaren con su profesor las posibles dudas.

Supera el reto

En parejas, lean con atención y comenten el procedimiento para resolver cada una de las situaciones planteadas. Contesten las preguntas.

1. ¿Cuál es el seno y la tangente del ángulo M, si su coseno es igual a $\frac{32}{40}$?
   a) Tracen en su cuaderno el triángulo y marquen el ángulo M, así como la medida de cada uno de sus lados. Determinen los valores de:
   sen M = tan M =
   b) Describan brevemente el procedimiento que utilizaron para resolver el problema anterior.

2. Dado el triángulo ABC, con C = 90°, B = 86°23' y a = 425 cm, calcular el valor de:
   A = ________ c = ________ b = ________
   (Se sugiere trazar el triángulo en su cuaderno y colocar los datos iniciales).
   a) Para encontrar el valor del ángulo y lados anteriores, ¿utilizaron funciones trigonométricas?, ¿cuáles?
   b) Describan alguna otra forma para determinar los valores anteriores.

3. ¿Qué medidas de los elementos del triángulo se pueden obtener a partir de las funciones trigonométricas?
   a) ¿Cuántos datos mínimos se necesitan para calcular las medidas de los seis elementos en un triángulo rectángulo?, ¿cuáles son?
   b) ¿Qué dificultades encontraron para resolver el ejercicio?
   c) ¿Consideran que las razones trigonométricas son útiles para resolver problemas de diversos tipos?

Comenten con otra pareja la forma en la que resolvieron los problemas, compárenlos y compartan sus argumentos. Con ayuda de su profesor, concluyan las ventajas de la utilización de las razones trigonométricas.

Explora

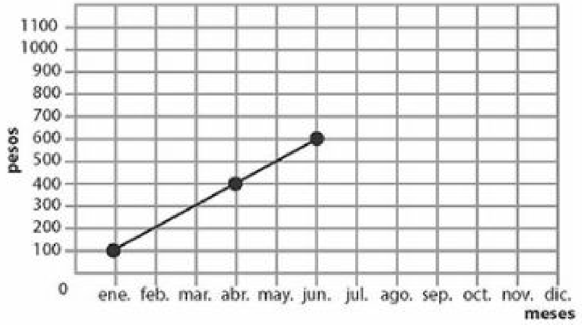
Para que refuerces los conocimientos adquiridos en la lección, entra al sitio: http://www.x.edu.uy/sencos.htm (Consulta: 21 de abril de 2013).
Modela los problemas y ejercicios propuestos y resuélvelos en tu cuaderno. Comenta la experiencia con un compañero y compartan sus resultados.

Proporcionalidad y Funciones

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

Lección 35. Razones de cambio

1. En equipos, analicen la siguiente gráfica que representa la variación de precio que ha tenido un producto que salió a la venta los primeros meses del año.



a) Hubo una variación en el precio del producto, ¿se incrementó o disminuyó?
   - ¿Cuánto varió el precio del enero a abril?
   - ¿Cuánto varió el precio del enero a mayo?
   - Considerando que el incremento del producto fue el mismo cada mes, ¿cuánto varió el precio del tercero al quinto mes?
   - ¿Cuánto varió el precio del cuarto al séptimo mes?

b) Si el incremento mensual fue el mismo, ¿cuál fue el incremento en el precio del producto por mes?
   - ¿Cuál sería el precio del producto en diciembre?
   - Escriban qué hicieron para conocer el precio del producto en el mes de diciembre.

c) Observa la gráfica y responde.
   - ¿El costo del producto varió de manera constante?
   - ¿Por cuánto varió el precio cada mes?
   - ¿Cómo calcularías el valor de la variación?

Comenten con el resto del grupo sus respuestas y los procedimientos para llegar a ellas.

Idea matemática

Al cociente que resulta del incremento del precio entre el número de meses que transcurren se le conoce como razón de cambio. De acuerdo con la gráfica presentada, se expresa a continuación la razón de cambio entre los meses de enero y abril.

Por ejemplo: $$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{Incremento en el precio}}{\text{Tiempo transcurrido}}$$

es decir: $$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{Costo de abril} - \text{Costo de enero}}{\text{Número del mes de abril} - \text{Número del mes de enero}}$$

$$\text{Razón de cambio} = \frac{400 - 100}{4 - 1} = \frac{300}{3} = 100$$

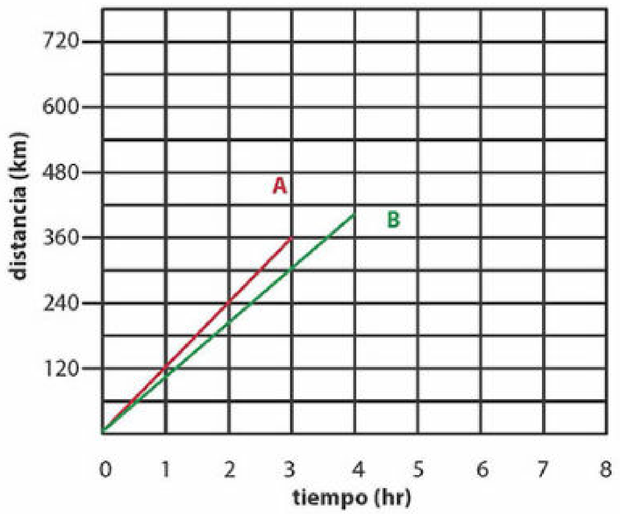
La razón de cambio en la variación del precio del producto fue de $100 al mes.

¡Sigamos adelante!

En equipo y de acuerdo a los datos que tienen en el problema de inicio de esta lección calculen lo siguiente.

- La razón de cambio de enero a mayo y la razón de incremento de junio a diciembre.
- ¿La razón de cambio es constante?, justifiquen su respuesta.

2. En parejas, realicen las siguientes actividades. Dos automóviles (A y B) hacen un recorrido como el que se muestra en la gráfica.



a) ¿Cuál es la razón de cambio entre la primera y la tercera hora desde la partida del automóvil A?

b) ¿Cuál es la razón de cambio entre la primera y la tercera hora desde la partida del automóvil B?

c) Si el lugar al que tenían que llegar estaba a 600 km de distancia del lugar de partida, ¿qué tiempo le llevó al automóvil A llegar a su destino?

   ¿Cómo hicieron para encontrar la respuesta?

d) ¿Cuál es razón de cambio entre la sexta y la tercera hora?

e) Si restan la ordenada de la tercera hora del recorrido del automóvil A menos la ordenada de la primera hora del mismo, ¿cuál es el resultado?
   - Si restan la abscisa de la tercera hora del recorrido del automóvil A menos la abscisa de la primera hora del mismo, ¿qué se obtiene?
   - Si se divide la resta de las ordenadas entre la resta de las abscisas, ¿cuál es el resultado?
   - Este último resultado, ¿coincide con la razón de cambio que encontraron para el recorrido del automóvil A?

Entonces tenemos:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\textit{ordenada de la tercera hora} - \textit{ordenada de la primera hora}}{\textit{abscisa de la tercera hora} - \textit{abscisa de la primera hora}}$$

es decir:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

f) Si sustituyen los valores correspondientes a y_3, y_1, x_3, x_1 , ¿cuál es el valor de la razón de cambio?

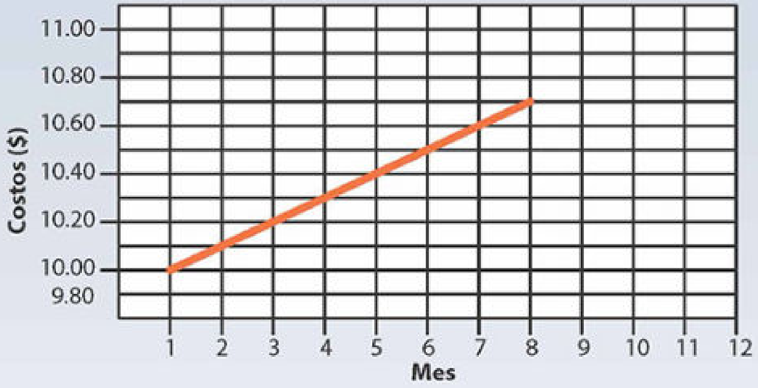
- Observemos la situación con el automóvil B.
- Resta de las ordenadas: $y_3 - y_1 =$ ______
- Resta de las abscisas: $x_3 - x_1 =$ ______
- Entonces, ¿cuál es la razón de cambio?
- Este último resultado, ¿coincide con la razón de cambio que encontraron para el recorrido del automóvil B?
- Si tuviera que recorrer 840 km, ¿qué tiempo le llevará al automóvil B llegar a su destino?
- ¿Hay alguna relación entre la razón de cambio y la pendiente de las rectas? ¿Por qué?

En grupo, revisen sus respuestas y procedimientos.

Supera el reto

De forma individual, resuelve las siguientes situaciones.

1. En una revista se publica esta gráfica sobre el incremento al costo de la gasolina.



a) Entre el primer y el quinto mes ¿cuál fue la razón de cambio si sabemos que:

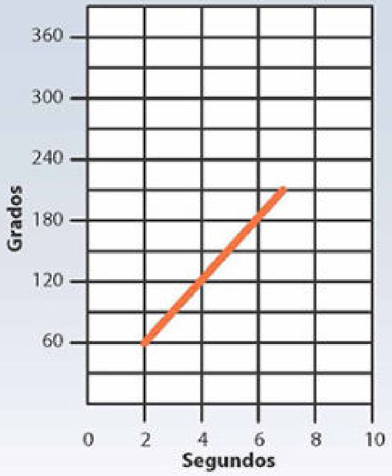
$$\text{Razón de cambio} = \frac{y_5 - y_1}{x_5 - x_1}$$

b) Entre el el octavo y el segundo mes, ¿cuál ha sido la razón de cambio?

c) Si el incremento es constante, ¿cuánto costará el litro de gasolina en el noveno mes?

Supera el reto

2. Se expuso una sustancia a cierta temperatura. En la gráfica se puede observar el comportamiento que tuvo.



a) ¿Cuál fue la razón de cambio que hubo al exponer la sustancia al calor entre los seis y los dos segundos?

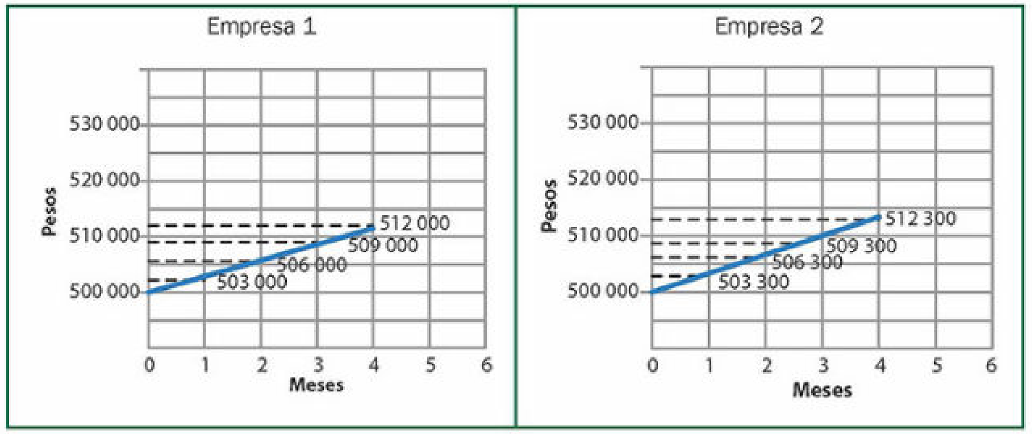
b) ¿Cuál fue la razón de cambio que hubo al exponer la sustancia al calor entre la los seis y los tres segundos?

c) ¿Qué temperatura alcanzará esa sustancia a los 10 segundos de iniciado el proceso?

d) ¿Cuál es la razón de cambio entre los 10 y los 5 segundos?

3. De forma individual, realiza las siguientes actividades.

a) Dos empresas de inversiones le ofrecen un plan a Rogelio, que se representan en las siguientes gráficas.



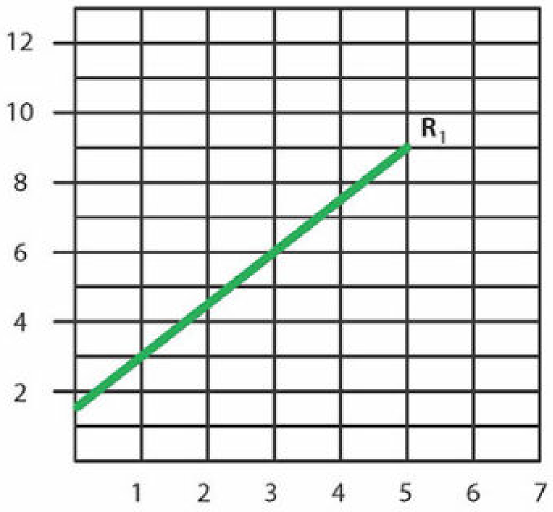
- ¿Cuál es la razón de cambio corespondiente a la ganancia que ofrece cada empresa?
- ¿Cuál es mayor?

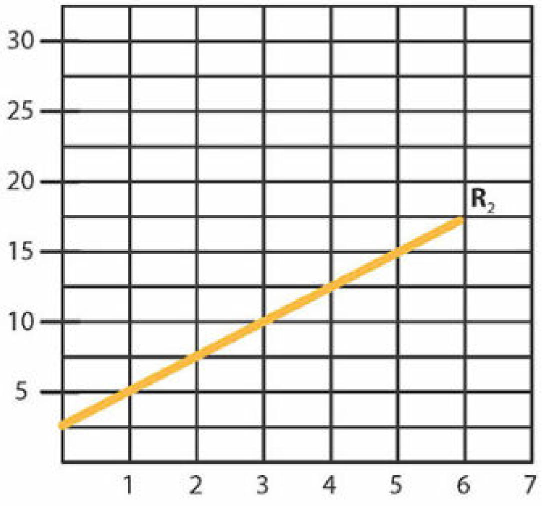
b) Construye la gráfica con las siguientes coordenadas conocidas y completa la tabla.

x	3	6	9	
y	6	12		24

- ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que se formó? ______

c) Calcula la pendiente de las rectas R_1 y R_2 mostradas en las siguientes gráficas.





- De las rectas R1 y R2, ¿cuál pendiente tiene mayor valor?
- ¿A qué crees que se debe?

d) Un fabricante de aguas de sabor encuentra una fórmula adecuada para prepararlas. Por cada 900 ml de agua deberá agregar 240 g de pulpa de fruta.

El fabricante comienza a hacer un registro en una tabla como la siguiente. Complétala.

Agua (ml)	900	1800	2700	3600				
Pulpa (g)	240	480	720	960				

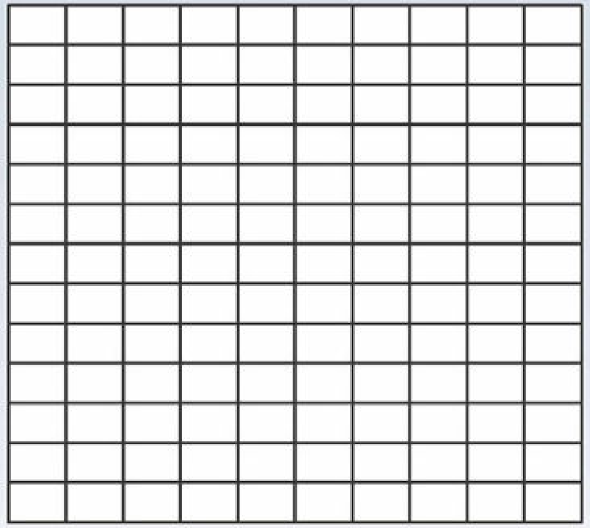
- ¿Cuál es la razón de cambio cuando pasa de 900 ml a 3600 ml?
- ¿Cuál será la razón de cambio cuando pasa de 720 ml a 6300 ml?
- ¿Es la misma razón de cambio?
- ¿Qué tanta pulpa le tendrá que poner a 18 l de agua?
- ¿Cuál es la inclinación de la recta que se formó?
- Si las dos rectas tuvieran la misma razón de cambio, ¿cómo serían sus pendientes?

Supera el reto

En tu cuaderno traza un cuadro como el de abajo; dibuja con diferente color las rectas que resultan de los datos de cada tabla y encuentra el valor de su pendiente.

x	3	5	6	9
y	6	10	12	18

x	5	6	7	8
y	0	2	4	6



- ¿Son paralelas las rectas que obtuviste?
- ¿Cuál es su razón de cambio?
- ¿Tienen la misma inclinación?
- ¿Cómo son los valores de sus pendientes?

4. Para concluir, contesta de forma individual.

a) ¿Cómo calculas la razón de cambio entre dos conjuntos de datos que se relacionan de tal manera que su gráfica es una recta?

b) ¿Cuál es la relación entre la razón de cambio y la pendiente de una misma recta?

c) Escribe la estrategia que te parece más sencilla y práctica para calcular la razón de cambio o el valor de la pendiente de una recta.

B4

Análisis y representación de datos

Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión

Lección 36. Rango, desviación media, varianza y desviación estándar

1. Reúnete con un compañero de clase, lean la situación y realicen lo que se pide. Una vez que hayan comentado ambos las respuestas, esperen indicaciones de su profesor para analizar en grupo la actividad.

   a) En un hospital se tomó el pulso tres veces al día a dos pacientes, obteniendo las siguientes mediciones:

   Javier: 72, 76, 74
   Omar: 58, 91, 71

   - ¿Qué promedio tienen las intensidades de pulso en cada paciente?
   - ¿Qué observas en las mediciones del pulso de Javier con respecto a las de Omar?
   - ¿Con qué paciente se deberá ser más precavido al recetar un medicamento? ¿Por qué?

2. Individualmente, lee y completa sobre la línea los conceptos que faltan.
   Las medidas de tendencia central, como ________, ________ y ________, son en ocasiones de poca utilidad, a menos que se conozca el grado de variación que se presenta a su alrededor.
   Los promedios no son suficientes para describir una distribución de datos porque sólo describen el comportamiento del punto central, pero no indican cómo están situados los datos en relación con el centro.

Idea matemática

Las medidas de dispersión describen el comportamiento de un conjunto de datos con respecto a un valor central.

Las medidas de dispersión más usuales son rango, desviación, media, varianza y desviación estándar.

3. Supongamos que se aplica una prueba de medida de pulso a 10 hombres y 10 mujeres. Las distribuciones se muestran a continuación.


40, 40, 50, 60, 60, 60, 60, 70, 70, 80.


20, 30, 40, 40, 60, 60, 70, 80, 90, 100.

   a) Analiza la distribución de datos obtenida de la medida de los pulsos y responde lo que se te pide.

   - ¿Cuál es el promedio en ambos casos?
   - ¿En qué caso hay mayor variabilidad?
   - ¿Cuál es el menor valor en los hombres?
   - ¿Cuál es el mayor valor en los hombres?
   - ¿Cuál es el menor valor en las mujeres?
   - ¿Cuál es el mayor valor en las mujeres?

Como lo muestra este ejemplo, es necesario que las medidas estadísticas midan el grado en el que se dispersan los datos.

   b) Regresando a la actividad anterior, responde.

   - ¿Cuál es la resta o diferencia entre el mayor y el menor dato de los valores en los hombres?
   - ¿Cuál es la resta o diferencia entre el mayor y el menor dato de los valores en las mujeres?

A esta diferencia entre los valores de los extremos se le conoce como *rango*.

Supera el reto

Calcula el rango de los datos mostrados al inicio de esta lección sobre los pulsos tomados a los pacientes Javier y Omar.

4. En la actividad de los pulsos de hombres obtuviste un promedio o media de 59, enseguida calcula la desviación respecto a la media.

d = 40 – 59 =	d = 60 – 59 =
d = 40 – 59 =	d = 60 – 59 =
d = 50 – 59 =	d = 70 – 59 =
d = 60 – 59 =	d = 70 – 59 =
d = 60 – 59 =	d = 80 – 59 =

   a) ¿Qué observas con los valores mayores a la media?
   b) ¿Qué observas con los valores menores a la media? ¿Qué puedes concluir?
   - Haz lo mismo con los valores de las medidas de las mujeres.

Idea matemática

El **rango** nos da una primera aproximación de la posible dispersión o desviación de los datos. Si el rango es grande, existe la posibilidad de que los datos estén alejados unos de otros y los valores centrales pueden ser representativos del conjunto.

La **desviación media** es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones a partir de la media. Para un conjunto de datos NO agrupados, la desviación media se calcula mediante la fórmula:

$$DM = \frac{\Sigma \; x - \overline{x}}{N}$$

Donde, Σ = sumatoria
$x - \overline{x}$ = valor absoluto de las desviaciones
N = total de datos

5. Realiza de manera individual lo que se solicita a continuación.
   a) En tu cuaderno, aplica la fórmula para obtener la desviación media de los datos sobre los pulsos medidos a los hombres y las mujeres.
   b) En equipos comenten y argumenten las ventajas y desventajas del rango, así como las de la desviación media.
      - Un representante de cada equipo leerá en voz alta sus argumentos para que se construyan conclusiones finales.

6. Realiza en tu cuaderno la siguiente actividad.
   Obtén el rango de las siguientes tablas, las cuales representan datos sobre los sueldos de un grupo de empleados y determina cuáles son más homogéneas.

Tabla 1

Sueldos	Núm. empleados
\$2800	2
\$3000	3
\$4000	4
\$5000	1
\$6000	1
\$20000	1
\$25000	1

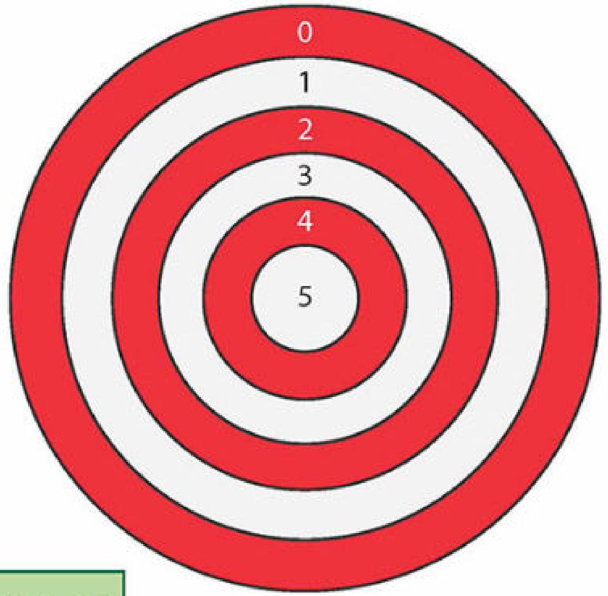
Tabla 2

Sueldos	Núm. empleados
\$2800	2
\$3000	3
\$4000	1
\$5000	2
\$6000	1
\$8000	2
\$15000	1

7. Encuentra el rango y la desviación media de los siguientes datos, los cuales representan los pesos de 15 personas.

   30, 28, 32, 40, 42, 36, 46, 41, 40, 33, 34, 37, 39, 42, 46

8. En una prueba de tiro al blanco, Mauro y Jesús obtuvieron los resultados indicados en las tablas. Completa en tu cuaderno los datos que faltan y realiza los cálculos requeridos a fin de determinar quién es el mejor.



Competidor Mauro

Puntos x	f	Puntos $P \times f$	$\lvert x - \overline{x} \rvert$	$f \lvert x - \overline{x} \rvert$
0	1			
1	1			
2	5			
3	14			
4	8			
5	1			

Competidor Jesús

Puntos x	f	Puntos $P \times f$	$\lvert x - \overline{x} \rvert$	$f \lvert x - \overline{x} \rvert$
0	2			
1	3			
2	5			
3	7			
4	9			
5	4			

Supera el reto

Se tienen dos conjuntos de datos:

A = 4, 5, 5, 5, 6, 8, 8, 19.
B = 2, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 14.

- ¿Cuál es el rango de cada conjunto?
- ¿Por qué en este caso en particular puede estar equivocada la interpretación de la dispersión?

Lo que aprendí

Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta cuando corresponda.

1. Se aplicó un examen a un grupo de 30 alumnos y se obtuvieron las siguientes calificaciones. Calcula la desviación media.

Calificación (x)	N° alumnos (f)	fx
4	2	8
5	2	10
6	6	36
7	10	70
8	7	56
9	1	9
10	2	20

La desviación media es:

a) Aproximadamente 6 b) Aproximadamente 7

c) Aproximadamente 8 d) Aproximadamente 9

2. ¿Cuál es la razón de cambio de los datos que se muestran en la tabla?

x	2.5	8.5
y	1	5

a) 1 b) 1.5 c) 0.66 d) 2.5

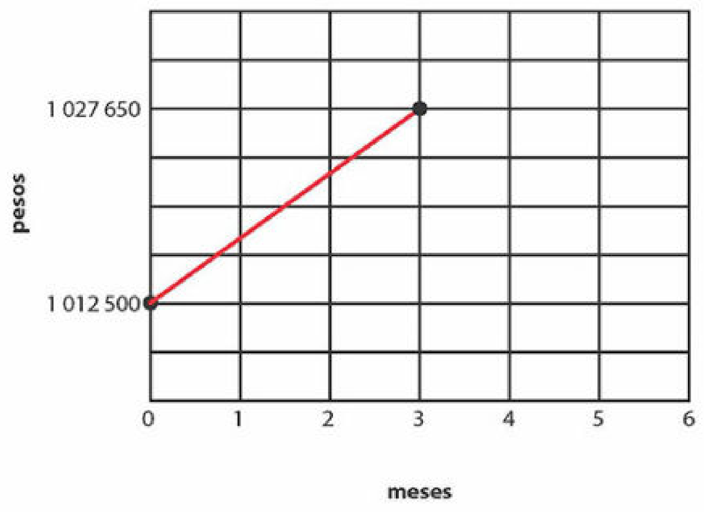
3. Si *tan* A = 1.6643, determina el valor del ángulo A.

a) 59° b) 60° c) 35° d) 2.5

4. Para calcular la altura de la torre Eiffel, Pedro se sitúa a 74 m de la base de la misma. Si observa la torre con un ángulo de elevación de 75°, ¿cuánto mide la torre?

a) 349.2 m b) 71.47 m c) 19.82 m d) 276 m

5. A Joel le indican en una gráfica el rendimiento que tendrá una inversión que hace con una tasa de interés fijo. ¿Cuál es la razón de cambio de su inversión de acuerdo con los datos que se muestran?



a) 15 150 b) 3 030 c) 5 050 d) 506 250

6. Sólido generado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

a) Cilindro b) Cono c) Esfera d) Pirámide

7. ¿Qué razón trigonométrica representa a la pendiente?

a) Seno b) Coseno c) Tangente d) Secante

8. ¿Qué elemento forma parte de la sucesión $6n + 2$?

a) 27 b) 118 c) 602 d) 94

Mi prueba PISA

Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta.

1. ¿Cuáles números de la columna de la derecha forman parte de la sucesión determinada por la regla mencionada? Escríbelos en la línea.

Regla	Elementos sugeridos
$7n + 7$	57, 77, 700, 775
n^3	1, 8, 9, 27, 125, 625
$3n - 1$	8, 89, 90, 91
$n + 2$	5, 10, 72, 81, 94

Fíjate en la última sucesión, si n pertenece a los números naturales, ¿cuál es el único elemento de ellos que no puede formar parte de la sucesión?

2. Se tiene la expresión $y = 2x + 4$, ¿cuál es el valor de la pendiente?

A) 1　B) 2　C) 4　D) 8

3. Si se sabe que $sen\ 26 = 0.5299$, entonces el cos ______ $= 0.4384$

A) 26　B) 90　C) 64　D) 62

4. Determina la longitud de la generatriz de un cono cuya área de la base es 28 cm² y su altura es de 5 cm.

A) 5.24 cm　B) 2.51 cm　C) 25 cm　D) 5 cm

5. ¿Cuál es el volumen de un cilindro de altura 10 cm y radio de la base 2 cm?

A) 125.6 cm³　B) 62.8 cm³　C) 12.5 cm³　D) 200 cm³

6. ¿Cuál es el valor de la tangente de un ángulo A, si su coseno es igual a $\frac{32}{40}$?

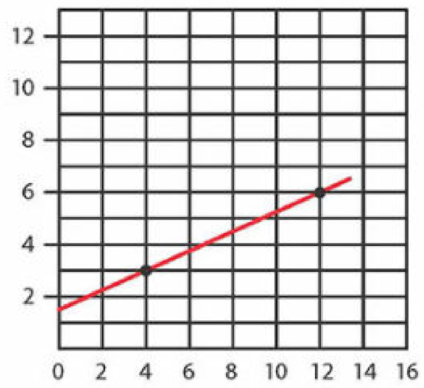
A) $\frac{40}{32}$　B) $\frac{24}{32}$　C) $\frac{32}{40}$　D) $\frac{1}{2}$

7. En una reunión están nueve personas cuyas edades son: 1, 2, 17, 19, 18, 20, 19, 16 y 14 años respectivamente. La dispersión entre la media aritmética y la desviación media es de:

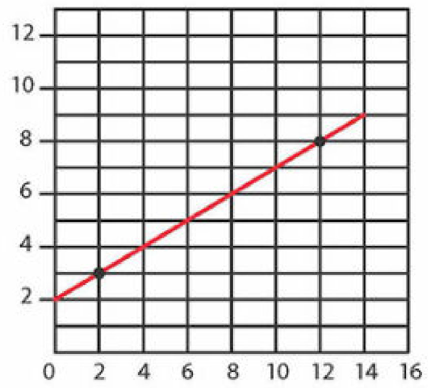
A) Más de 10　B) Más de 5　C) Más de 8　D) No se sabe

8. ¿Cuál de las siguientes gráficas tiene como razón de cambio 1?

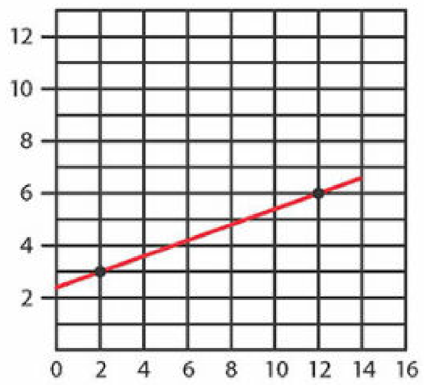
A)



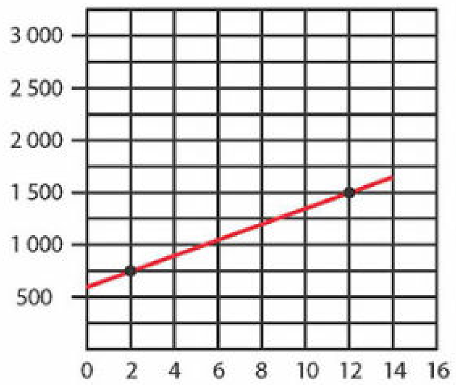
B)

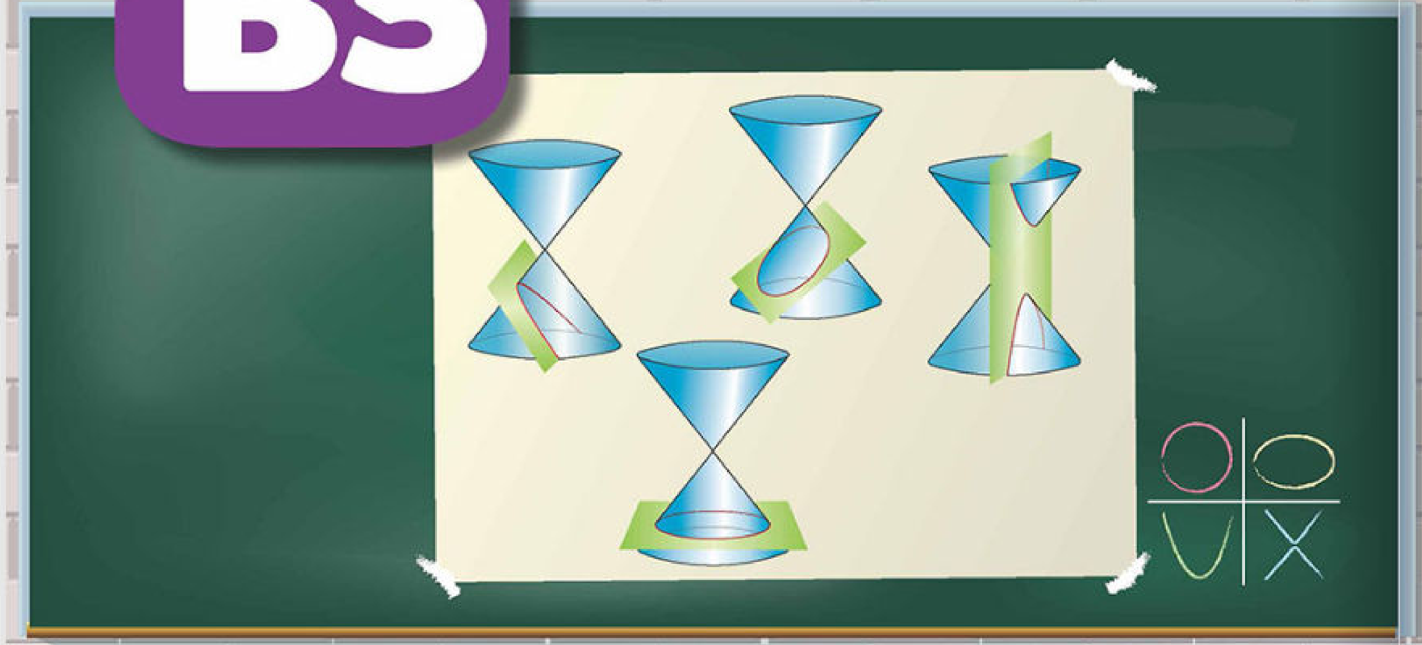


C)



D)





B5

Competencias que se favorecen

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes

Evaluación diagnóstica

Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta cuando corresponda.

1. ¿Qué tipo de línea se forma con la expresión $5x + 3 = -7$?

   a) Una recta b) Una parábola c) Una hipérbola d) Una mixta

2. Al graficar la función $y = 6x - 2$, ¿en qué punto se corta la gráfica resultante con el eje de las ordenadas?

   a) 1 b) −1 c) 2 d) −2

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando el método que prefieras.

$$2x + 2y = 8$$
$$-y - 2y = 16$$

4. ¿Cuál es la raíz o solución de la ecuación $4x + 8 = 6x - 10$?

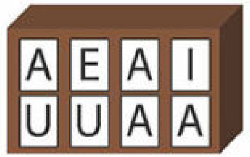
   a) 1 b) −1 c) 9 d) −9

5. Elige las raíces o soluciones de la ecuación $6x^2 + 4x = 0$

   a) 0 y 6 b) 0 y $-\frac{2}{3}$ c) 2 y 6 d) 2 y $\frac{2}{3}$

6. Se tienen en una urna las siguientes tarjetas, se saca una al azar, ¿qué opción describe un evento equiprobable?

   a) Sacar una consonante
   b) Sacar una "U" o una "A"
   c) Sacar una "A" u otra vocal
   d) Sacar una "I"

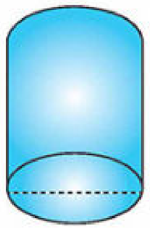


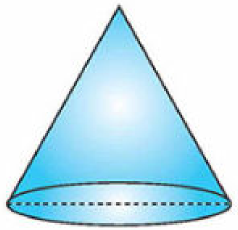
7. ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un prisma?

8. ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de una pirámide?

9. ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un círculo?

10. Anota en las líneas el nombre de los siguientes sólidos geométricos.





Patrones y ecuaciones

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada

Lección 37. Resolución y formulación de problemas que implican el uso de ecuaciones

En las lecciones anteriores has resuelto problemas utilizando diversos tipos de ecuaciones, ¿recuerdas cuáles eran? Coméntalo en forma grupal.

Existen otros problemas que implican el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones de 2×2. Escribe dos métodos de resolución para estos sistemas.

1. Utilizando cualquiera de los métodos que mencionaste, resuelve en tu cuaderno el siguiente sistema:

$$2x + 5y = 25$$
$$3x - y = 12$$

Las ecuaciones son muy útiles para solucionar problemas en cualquier área como la biología, los deportes, la vida diaria, etcétera.

2. Organizados en parejas, lean, comenten y resuelvan la siguiente situación.

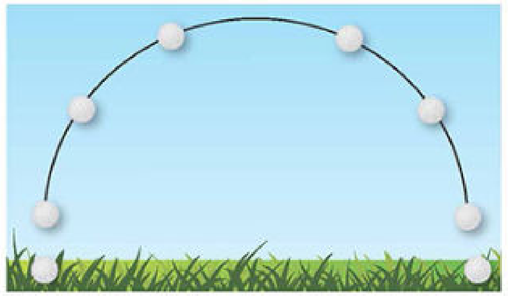
   ¿Han practicado o visto cómo se juega el golf? Se trata de un deporte al aire libre donde se utilizan palos diseñados especialmente para impulsar una bola pequeña y dura sobre un campo de juego que tiene 18 hoyos.

   a) Si un jugador hace un tiro, ¿qué trayectoria sigue la pelota? Investígalo u observa la ilustración.

   Intercambien sus respuestas y establezcan conclusiones en forma grupal.

El golfista, aparte de practicar pegándole a la pelota, debe estudiar los tiros que efectuará; si la altura y que alcanza la pelota de golf depende del tiempo x (en segundos), esto se representa en la ecuación:

$$y = 25x - 5x^2$$



- ¿Qué altura máxima tendrá la pelota antes de tocar el suelo nuevamente?
- Expliquen brevemente cómo calcular el tiempo que tarda la pelota en tocar el suelo.
- Resuelvan en su cuaderno y contesten: ¿después de cuánto tiempo toca el suelo la pelota?
- ¿Qué hicieron para determinar este resultado?

b) Completen la tabla siguiente que permite calcular la altura de la pelota, a partir del tiempo x, en segundos.

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

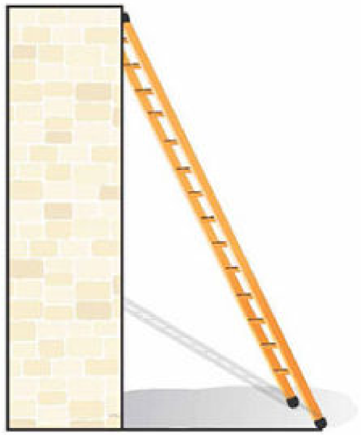
- Con $x = 6$, ¿cómo fue la altura y?, ¿cómo se puede interpretar ese resultado?
- ¿En cuántos segundos tocó el suelo la pelota?
- ¿Entre qué tiempos alcanza la pelota su máxima altura?
- ¿Consideran que existe un método más sencillo que la tabulación para determinar cuánto tardará la pelota en tocar el suelo?

c) Para verificar cuánto tardará la pelota en tocar el suelo, resuelve algebraicamente la ecuación cuadrática por el método que prefieras. ¿Con qué debes igualar la altura para resolver la ecuación?
Comenten con otra pareja los resultados obtenidos y hagan una reflexión grupal sobre las ecuaciones cuadráticas y todos los datos que pueden proporcionar.

3. Con la finalidad de practicar el planteamiento de los modelos matemáticos que permitan resolver los problemas, escribe en tu cuaderno la ecuación correspondiente en cada caso y responde las preguntas que están debajo de cada inciso.

a) El cuadrado de cierto número positivo es 4 veces el mismo número más 5. ¿Qué representa la incógnita?

b) Determina la longitud de la escalera de la figura si la distancia entre la pared y la base de la escalera es de 1.5 m, mientras que la altura hasta el extremo superior de la escalera es de 3 m. ¿Qué representa la incógnita?



Palabra pi

modelar. Establecer una ecuación que represente alguna situación o problema a resolver.

c) Propón una situación que se pueda **modelar** con la representación:

$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$

Verifica con un compañero tus respuestas de las actividades anteriores y compartan en forma grupal las diversas situaciones planteadas a partir del modelo dado. Concluyan con ayuda de su profesor.

Idea matemática

Los problemas que has resuelto con anterioridad en esta lección utilizan una ecuación cuadrática para modelarse; sin embargo, recuerda que existen las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales que también puedes usar para modelar problemas y resolverlos.

4. Organizados en parejas realicen las siguientes actividades, planteen las ecuaciones y resuélvanlas en su cuaderno.
Rusia y Japón poseen la mayoría de los buques mercantes del mundo. Su total combinado es de 15 426. Japón tiene 2 276 barcos más que Rusia.

a) ¿Cuántas incógnitas tiene el problema?
b) Definan qué representa cada una de las incógnitas.
c) ¿Cuántas ecuaciones se necesitan para resolverlo?
d) Escriban las ecuaciones.
e) Resuelvan por cualquier método el sistema planteado y determinen las incógnitas.
f) Anoten la cantidad de buques de Rusia y la cantidad que corresponde a Japón.

Compartan en forma grupal los resultados. Si tienen dudas, aclárenlas con ayuda de su profesor y formulen conclusiones.

Supera el reto

En grupo, analicen la ecuación y redacten entre todos un problema que se pueda solucionar con ella. Resuélvanlo en sus cuadernos y compartan el resultado final.

$$x^2 + 0.2x = 60$$

Comenten algunas otras opciones de planteamiento de problemas que se puedan determinar con la ecuación anterior.

5. Con el objetivo de que apliques los conocimientos desarrollados en esta lección, plantea y resuelve en tu cuaderno los problemas que a continuación se presentan.

a) En una tienda de mascotas se compraron 15 animales entre perros y gatos; cada perro costó \$3 000 y cada gato \$1 500. Se hizo una inversión total de \$30 000. ¿Cuántos perros y cuántos gatos se compraron?

b) Un trozo de alambre de 28 cm de largo se ha doblado en forma de ángulo recto. Determina la distancia entre ambos extremos del alambre, si uno de los lados del ángulo formado mide 12 cm.

c) El segundo ángulo de un triángulo es seis veces más grande que el primero. Si el tercer ángulo es 45° más grande que el doble del primero, ¿cuánto mide cada ángulo?

d) La superficie de un terreno rectangular mide 396 m²; si el lado más largo mide 4 m más que el otro lado, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

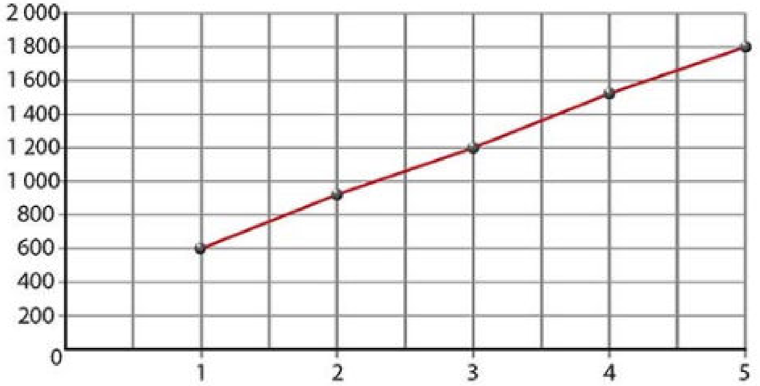
e) Un estudiante obtuvo 6.4 y 7.8 como calificación en dos exámenes, respectivamente. ¿Cuánto debe obtener en un tercer examen para lograr un promedio de 8?

6. Analiza las ecuaciones y redacta un problema que se pueda resolver con cada una de ellas. Soluciónalo en tu cuaderno.

a) $x + y = 170$
$x - y = 20$

b) $x + (x + 5) = 150$

7. Propón una situación que se pueda modelar a partir de la gráfica.



- ¿Qué tipo de ecuación se plantea a partir del problema que formulaste?
- Resuelve y escribe el resultado.
- ¿Qué recomendaciones podrías dar para plantear un problema o modelarlo, una vez que viste su representación gráfica o algebraica?
- ¿Te sirvió realizar esta modelación de los ejercicios de la lección para recordar algunos de los temas que manejaste anteriormente en tu libro y en otros años de la secundaria?

Explora

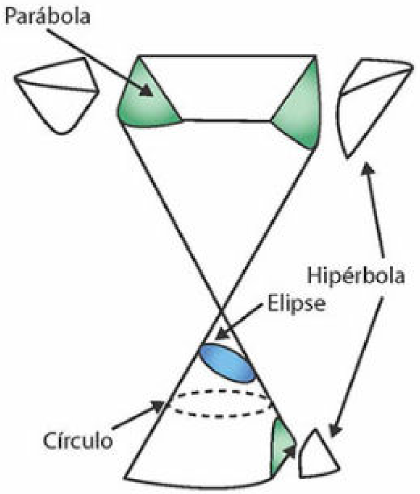
Para reforzar el tema de esta lección, entra al sitio: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0045-01/secciones/problemas.html Comenta con tus compañeros la eficacia del proceso que se sugiere para resolver problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales y póngalo en práctica resolviendo algunos ejercicios. (Consulta: 25 de enero de 2017).

Medida

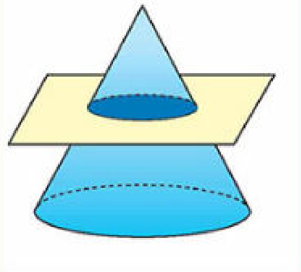
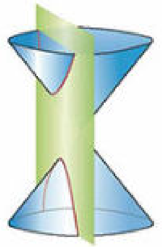
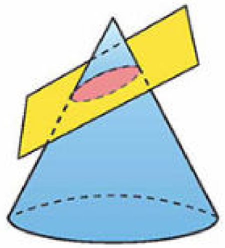
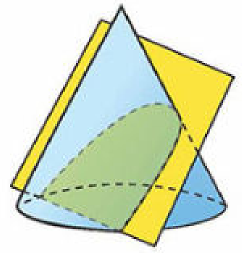
Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto

Lección 38. Cortando conos

El cono fue una figura muy estudiada por el griego Apolonio de Perga. Él analizó las curvas que se generan cuando el cono es cortado por un plano en diferentes posiciones. Apolonio dio el nombre a las figuras que se obtienen: parábola, elipse e hipérbola, denominaciones que seguimos utilizando actualmente. Estas curvas están presentes en muchos fenómenos de la naturaleza, como la trayectoria de un proyectil (parábola) o las órbitas que siguen los planetas alrededor del sol (elipses) y tienen diversas aplicaciones prácticas, como la construcción de espejos especiales (hipérbola).



1. Modela con plastilina cuatro conos de distintos tamaños y realiza con cuidado un corte diferente para cada cono tal como se muestran en las figuras de bajo.

Corte paralelo a la base	Corte perpendicular a la base	Corte paralelo a la generatriz	Corte inclinado pero sin llegar a la base
			

a) ¿Qué figura se forma si cortas un cono con un plano paralelo a la base?
b) ¿Qué figura obtienes si cortas un cono con un plano perpendicular a la base?
c) ¿Qué figura se logra si realizas un corte al cono con un plano paralelo a la generatriz?
d) ¿Qué figura se forma si cortas un cono con un plano inclinado, pero sin llegar a la base?

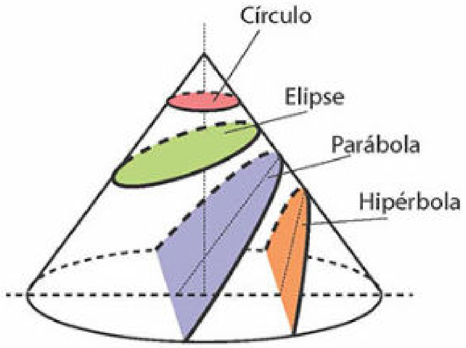
Supera el reto

Dibuja en tu cuaderno las figuras que obtuviste para cada caso y anótale sus respectivos nombres. Compara tus respuestas con las de tus compañeros de grupo.

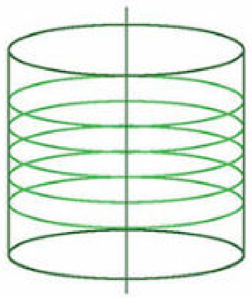
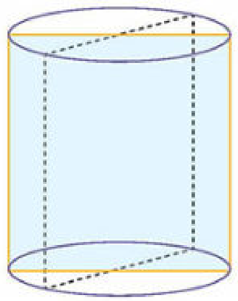
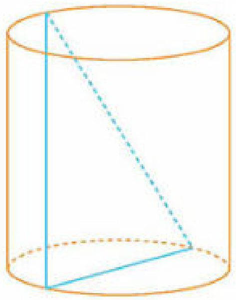
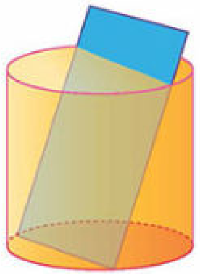
- ¿Obtuvieron las mismas figuras? Si no, traten de ponerse de acuerdo.
- ¿Éstas son las únicas figuras que se pueden obtener o es posible hacer otros cortes?

Idea matemática

Las cónicas se definen como las curvas que se generan al cortar con un plano diferentes puntos de un cono.
La parábola es la sección cónica resultante de cortar un cono recto con un plano paralelo a su generatriz. Su forma corresponde con las gráficas de las ecuaciones cuadráticas.
La hipérbola es una sección cónica obtenida al cortar un cono recto por un plano paralelo a su eje de simetría.
La elipse resulta al cortar la superficie de un cono recto por un plano inclinado respecto a su eje de simetría.
El círculo resulta al cortar un cono recto con un plano paralelo a la base.



2. Modela con plastilina cuatro cilindros de distintos tamaños y realiza con cuidado un corte diferente para cada uno de ellos tal como se muestra en las figuras.

Cortes paralelos a la base	Corte perpendicular a la base
	
Oblicuo a la base (1)	**Oblicuo a la base (2)**
	

a) ¿Qué figuras se obtienen al hacer cortes paralelos a la base de un cilindro?
b) ¿Qué figura se genera al hacer un corte perpendicular a la base?
c) ¿Qué figura se logra al hacer un corte oblicuo a la base (1)?
d) ¿Qué figura se obtiene al hacer un corte oblicuo a la base (2)?

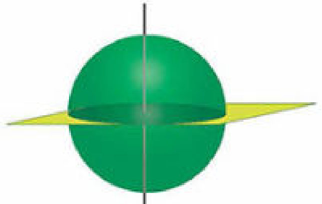
Supera el reto

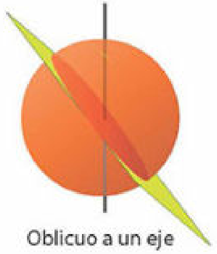
Dibujen en su cuaderno las figuras que quedaron en cada caso y anoten su nombre.

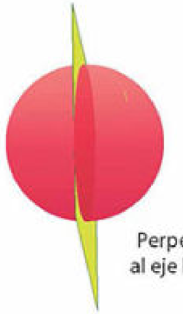
Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo.

- ¿Obtuvieron las mismas figuras?, en caso de que no, traten de ponerse de acuerdo.
- ¿Éstas son las únicas figuras que se pueden obtener o se pueden hacer otros cortes?
- Realicen otros cortes en otras posiciones para justificar su respuesta.

3. Por equipos, con la misma plastilina que han usado en las actividades anteriores, modelen tres esferas y realicen los cortes mostrados en las siguientes figuras.


Perpendicular al eje vertical


Oblicuo a un eje


Perpendicular al eje horizontal

a) ¿Qué figura resulta al cortar la esfera con un plano en forma perpendicular a su eje vertical?
b) ¿Qué figura se obtiene al hacer un corte a la esfera con un plano oblicuo a un eje?
c) ¿Qué figura se obtiene al cortar la esfera con un plano perpendicular a su eje horizontal?

Supera el reto

Tracen en su cuaderno las figuras que obtuvieron en cada caso y anoten sus respectivos nombres. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo.

- ¿Obtuvieron las mismas figuras? Si no fue así, traten de ponerse de acuerdo.
- ¿Éstas son las únicas figuras que se pueden obtener podrían realizarse otros cortes?

4. Reúnanse en equipos. Cada uno elabore un cono con la misma plastilina con la que han trabajado e imaginen en qué posición con respecto a la base, debe hacerse pasar un plano a fin de que lo corte y así obtener un triángulo. Realicen tantos cortes como sea necesario.

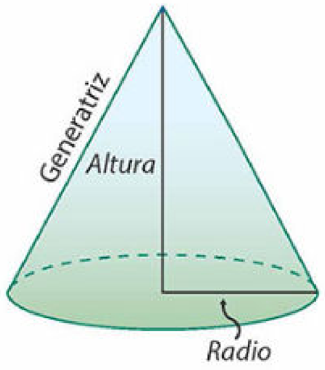
Comenten con sus compañeros de grupo lo qué hicieron para saber la posición que debía tener el plano para obtener el triángulo.

Medida

Lección 39. Medidas de los radios de los círculos al hacer cortes a un cono

1. Organizados en equipos realicen las siguientes actividades.

a) Consigan el siguiente material: 3 vasos cónicos de papel y una hoja de papel.



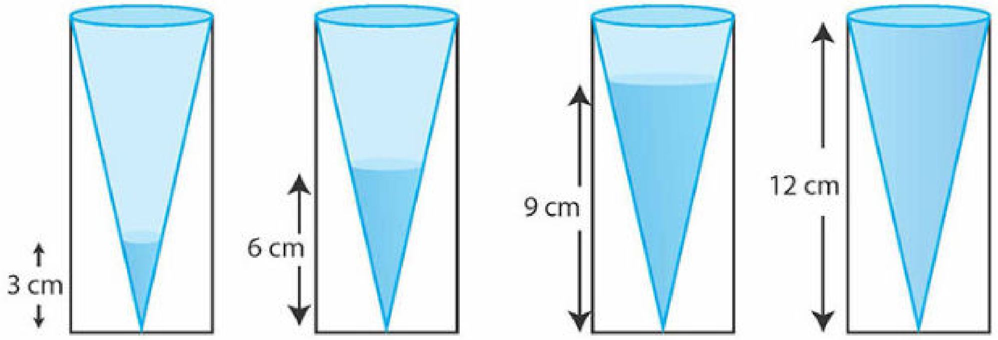
- Sobre la hoja de papel, tracen la circunferencia de la base del cono.
- Determinen el diámetro y el radio de la base.
- Identifiquen y midan la altura del cono.
- Comenten con sus compañeros de grupo el procedimiento que siguieron para encontrar esas medidas.

b) Tomen otro cono y córtenlo un centímetro por encima de su base.

- Sobre la hoja de papel, tracen la circunferencia obtenida en la base.
- Determinen el diámetro y el radio de la base.
- Midan la altura del cono obtenido.

c) A un tercer cono ahora córtenle dos centímetros por encima de su base. Repitan los puntos del inciso b y comparen qué sucede con la altura y el radio del cono que va quedando cuando se corta el vaso centímetro por centímetro. Tomen más conos y realicen los cortes si lo consideran necesario. Comenten sus respuestas con sus compañeros.

d) Mario hizo un experimento con un cono cuyo radio de la base medía 3.2 cm y su altura era igual a 12 cm. Conforme iba aumentando la altura del agua fue registrando sus observaciones en una tabla. Observa y contesta.
Recuerda que en la medición existe un cierto grado de error, ya que las medidas nunca son exactas.



Conforme aumentaba la altura del agua, ¿qué pasaba con el tamaño y radio de los círculos que se iban formando?

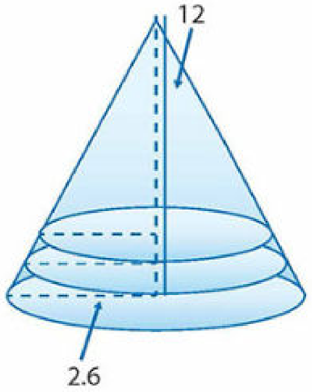
- Elabora la gráfica que corresponde a la tabla que construyó Mario.

Altura	Radio
3	0.8
6	1.6
9	2.4
12	3.2

- ¿Qué tipo de gráfica se formó?

2. Trabajando en parejas, observen el cono de la siguiente figura, que tiene 12 cm de altura y 2.6 cm de radio. Si hacemos cortes paralelos a la base, ¿cómo varía su radio a cada corte? Completen la tabla en sus cuadernos y realicen la gráfica correspondiente.

Altura	Radio
12	2.6
11	
10	
9	
8	
7	
6	



a) ¿Qué figura se forma con la altura del cono, el radio y la generatriz?

b) ¿Qué pasa cuando disminuye la altura al hacer un corte?

c) ¿Cómo podemos saber cuánto medirá el radio?

d) ¿Qué procedimiento siguieron para encontrar cada uno de los radios cuando se van haciendo los cortes?

e) ¿Qué relación hay entre la medida de la altura del cono y la medida del radio de la base?

f) ¿Qué tipo de gráfica se formó?

g) ¿La recta pasa por el origen del plano cartesiano?, expliquen su respuesta.

h) Comenten sus respuestas con los compañeros de grupo. Expliquen qué tipo de procedimiento utilizaron para encontrar la medida de los radios. Si utilizaron diferentes métodos, pasen al pizarrón y, supervisados por su profesor, verifiquen si son correctos y escríbanlos en su cuaderno.

B5

Supera el reto

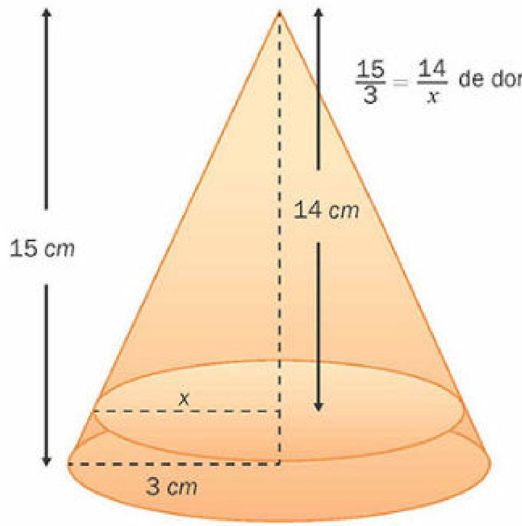
En forma individual, completa las siguientes tablas para encontrar los radios de los conos. Realiza las gráficas correspondientes en tu cuaderno.

Altura	Radio
30	10
29	
27	
26	
25	
24	

Altura	Radio
20	6
17	
16	
15	
14	
13	

- Comenta con tus compañeros de grupo tus resultados.

3. El siguiente cono mide 15 cm de altura y 3 cm de radio. De manera individual, utiliza la regla de tres para completar la tabla y realiza la gráfica correspondiente en tu cuaderno.



$\frac{15}{3} = \frac{14}{x}$ de donde $x = 2.8$

Altura (cm)	Radio (cm)
15	3
14	
11	
9	
7	
5	
3	

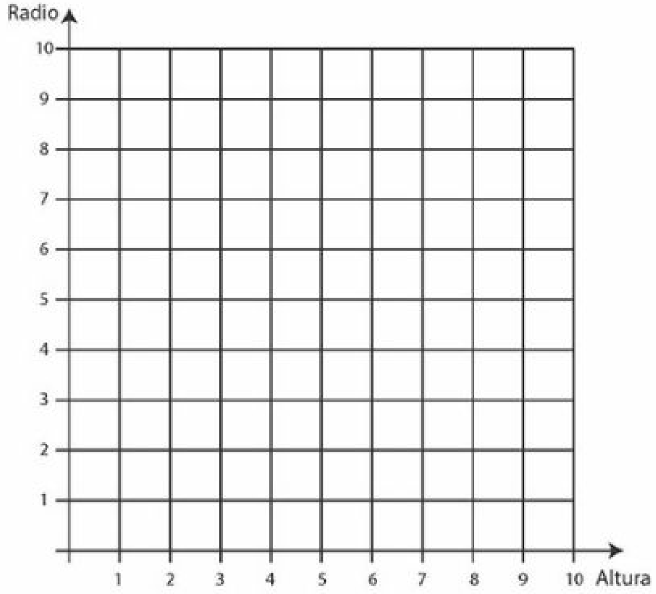
a) Comenta las respuestas con tus compañeros de grupo.
b) ¿Qué relación hay entre la medida de la altura del cono y la medida del radio de la base?
c) ¿Qué tipo de gráfica se formó?
d) ¿La recta pasa por el origen del plano cartesiano?, explica tu respuesta.

4. Reunidos en equipos hagan el siguiente experimento.

a) Consigan conos de papel para beber agua (pueden usar varios para que quede más firme) y un vaso graduado (puede ser de los que vienen con algún medicamento como jarabes, etcétera).
b) Llenen con agua el vaso graduado, para posteriormente verterla en el cono de 10 ml en 10 ml paulatinamente, como se observa en la figura.

c) Midan la altura que va alcanzando y calculen la medida del radio correspondiente al círculo que se forma.
d) Construyan una tabla con los datos obtenidos y tracen la gráfica correspondiente.

Altura	Radio



e) Cuando la altura del agua contenida en el cono llegue aproximadamente a 6 cm, ¿cuál será la medida de su radio?

f) Comenten en forma grupal el procedimiento que emplearon para hacer este experimento y cómo obtuvieron los resultados. ¿Qué fue lo qué más se les dificultó?, ¿qué hicieron para resolver las dificultades?

B5

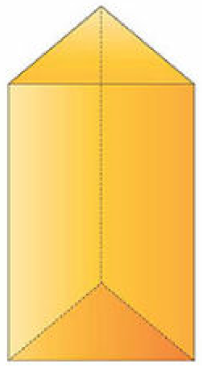
Medida

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides

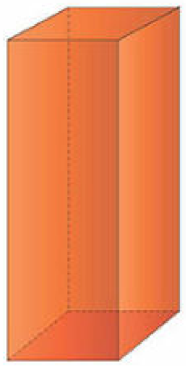
Lección 40. Construcción de la fórmula para el volumen del cilindro

1. Reunidos en parejas, realicen las siguientes actividades.

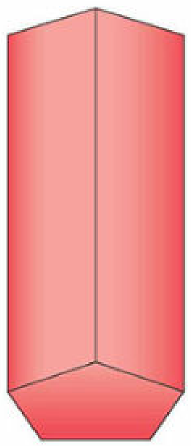
a) Calculen en sus cuadernos el volumen de los siguientes prismas.



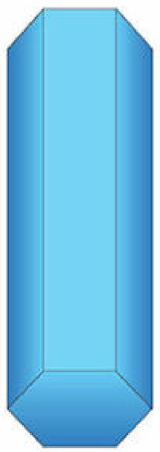
Prisma triangular
Lado de la base = 4 cm
Altura del triángulo = 3.5 cm
Altura del prisma = 10 cm



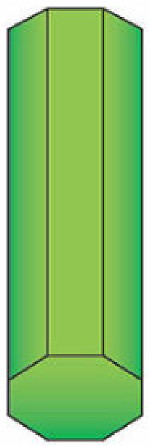
Prisma cuadrangular
Lado de la base = 3 cm
Altura del prisma = 10 cm



Prisma pentagonal
Lado de la base = 5 cm
Altura = 8 cm



Prisma hexagonal
Lado de la base = 4 cm
Altura = 8 cm



Prisma octagonal
Lado de la base = 3 cm
Altura = 8 cm

- ¿Recuerdan cómo se calcula el volumen de un prisma?, si no lo recuerdan investíguenlo.
- Escriban las fórmulas para calcular el área de un cuadrado y de un triángulo.
- ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un polígono?
- ¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen de un prisma?
- ¿Cómo obtienen la apotema de un polígono?
- ¿Quiénes hayan utilizado funciones trigonométricas para encontrar el valor de la apotema de los polígonos de las bases de los prismas? Deberan exponer ante sus compañeros la forma en que lo hicieron.
  Si alguien aplicó otro método pídanle que también lo exponga.

Idea matemática

Recuerda que el área de un polígono se obtiene a partir de la fórmula:

$$A = \frac{(P)(ap)}{2}$$

Donde P es el perímetro del polígono y ap la apotema.

b) Reúnan los datos necesarios para obtener el volumen de los prismas y completen la tabla.

Figura	Área de la base	Altura	Volumen
P. Triangular			
P. Cuadrangular			
P. Pentagonal			
P. Hexagonal			
P. Octagonal			

- Comenten con sus compañeros de grupo el procedimiento que siguieron para calcular el volumen de los prismas.
- ¿Qué sucede con el polígono de la base cuando el número de sus lados aumenta?
- Siguiendo el procedimiento que utilizaron para calcular el área de la base de los prismas, determinen la expresión que representa el área de la base de un cilindro.

Idea matemática

Observa que entre más aumenta el número de lados de un polígono, éste se aproxima cada vez más a un círculo. De igual forma, en un prisma, al aumentar el número de lados de la base, éste se aproxima a un cilindro.

- Posteriormente calculen el volumen de un cilindro con altura de 8 cm, y radio de la base igual a 2 cm. ¿Qué cálculo realizaron para obtener el volumen del cilindro a partir de su base?
- Determinen la expresión que representa el volumen de un cilindro.

Cilindro
Radio de la base = 2 cm
Altura = 8 cm

Idea matemática

El volumen de un cilindro es: $V = \pi r^2 h$

Donde $\pi = 3.14$ h = altura r = radio de la base

Supera el reto

De manera similar al procedimiento seguido para la construcción de la fórmula del volumen del cilindro, construye la expresión para obtener el volumen del cono tomando como referencia las fórmulas de pirámides.

2. En forma individual, haz uso de tu calculadora y resuelve los ejercicios que se plantean a continuación.
   a) Calcula el volumen de un cono de 9 cm de altura y cuyo diámetro de la base mide 4 cm.
   b) Establece el volumen de una cisterna de forma cilíndrica cuyo radio de la base es de 3 m y cuenta con 2 m de altura.
   c) ¿Cuál es la altura de un cono que mide 25 cm de radio y su volumen es de 35.325 cm³?
   d) ¿Cuál es el volumen de una lata cilíndrica de leche que tiene 5 cm de radio y 15 cm de altura?

Supera el reto

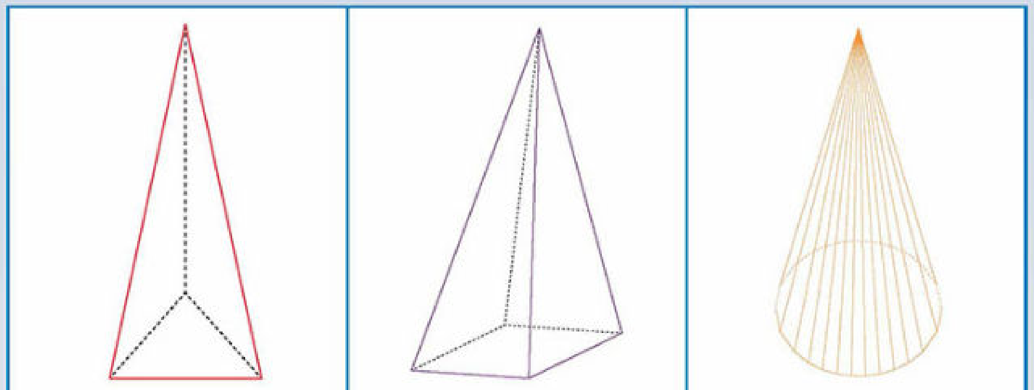
En equipos, consigan una lata cilíndrica de refresco, calculen su volumen e investiguen si el contenido neto que está escrito en la lata es el correcto. Expliquen el procedimiento que siguieron para llegar a los resultados con sus compañeros de grupo.

Medida

Lección 41. Construcción de la fórmula para el volumen del cono

Supera el reto

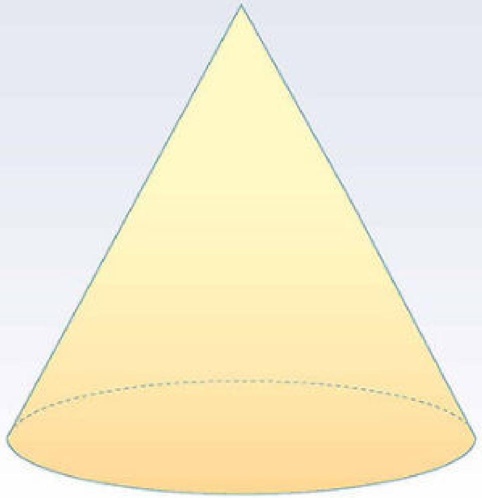
Organizados en equipos, calculen el volumen de las pirámides.



Pirámide triangular Lado de la base = 4 cm Altura de la pirámide = 10 cm	Pirámide cuadrangular Lado de la base = 3 cm Altura de la pirámide = 10 cm	Pirámide de 20 lados Lado de la base = 0.6 cm Altura de la pirámide = 10 cm

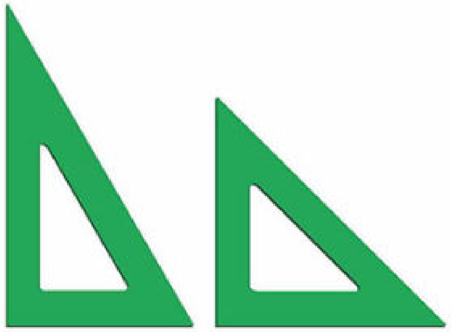
- Comenten con sus compañeros de grupo el procedimiento que siguieron para calcular el volumen de las pirámides.
- Con base en el procedimiento que siguieron para calcular dichos volúmenes, determinen el volumen del cono.

Radio de la base = 2 cm
Altura del cono = 10 cm
V = ______________



1. Reunidos en equipos, tomen las dos escuadras de un juego de geometría. Obsérvenlas y anoten en sus cuadernos 3 similitudes entre ellas.

   a) Comenten sus respuestas con sus compañeros de grupo y comparen si son las mismas. Seguramente una de las similitudes es que ambas son triángulos rectángulos.
   b) En las escuadras que aparecen en la imagen, anota las letras que representan los catetos y la letra que representa la hipotenusa en cada una.
   c) Tomen una de sus escuadras, colóquenla como en la imagen y gírenla hacia la derecha.
   d) ¿Qué cuerpo geométrico va generando la hipotenusa al ir girando la escuadra?
   e) Comenten sus respuestas con sus compañeros de grupo.



2. Reunidos en equipos realicen las siguientes actividades.

   a) Elijan una de las siguientes opciones y construyan con una cartulina los cilindros y conos que se indican, cada equipo escogerá uno diferente. En grados anteriores han construido estas figuras. Si no recuerdan cómo se hace, busquen estos desarrollos en internet.

      - Un cilindro que mida 7 cm de altura y que el diámetro de la base sea de 6 cm y un cono cuyo diámetro de la base sea 6 cm y su altura sea de 7 cm.
      - Un cilindro que mida 2 cm de radio en su base y su altura sea de 10 cm y un cono que mida 2 cm de radio en su base y 10 cm de altura.
      - Un cilindro que tenga 5 cm de diámetro y de altura 12 cm y un cono cuyo diámetro de la base mida 5 cm y de altura 12 cm.
      - Un cilindro que mida 3 cm de radio en su base y de altura 15 cm y un cono con 3 cm de radio en su base y de altura 15 cm.

   b) Comenten con sus compañeros de grupo como hicieron estas construcciones.
   c) Midan las bases y las alturas de los sólidos que construyeron. Completen la tabla en sus cuadernos de acuerdo con sus resultados.

Medidas de las construcciones en el inciso: ______	
Diámetro de la base del cono = ______	Diámetro de la base del cilindro = ______
Altura del cono = ______	Altura del cilindro = ______

- ¿Qué similitudes notan en las medidas de los sólidos?
- Armen el cono y cilindro. Llenen el cono de tierra, azúcar, harina o arena y vacíen el contenido en el cilindro. Repitan el procedimiento hasta llenarlo.
- ¿Cuántas veces cabe el contenido del cono en el cilindro?
- ¿A qué conclusión pueden llegar con respecto al volumen si se tiene un cilindro y un cono con la misma altura y el mismo diámetro?
- Escribe la fórmula para calcular el volumen del cilindro.
- ¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen del cono?
- Cada equipo calcule el volumen del cono y el del cilindro. Dividan el volumen del cilindro entre el volumen del cono. ¿Qué resultado obtuvieron?

Idea matemática

El volumen de un cono es:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

en la que: $\pi = 3.14$ h = altura y r = radio de la base

3. En forma individual, completa en tu cuaderno las siguientes tablas. Traza la figura correspondiente y contesta las preguntas.

a) Volumen de un cilindro que tiene 2.5 cm de radio y 8 cm de altura	b) Volumen de un cono que tiene 2.5 cm de radio y 8 cm de altura
• Diámetro de la base: • Altura: • Volumen:	• Diámetro de la base: • Altura: • Volumen:

- Observa los resultados de los volúmenes. ¿Cuántas veces cabe el volumen del cono en el cilindro?

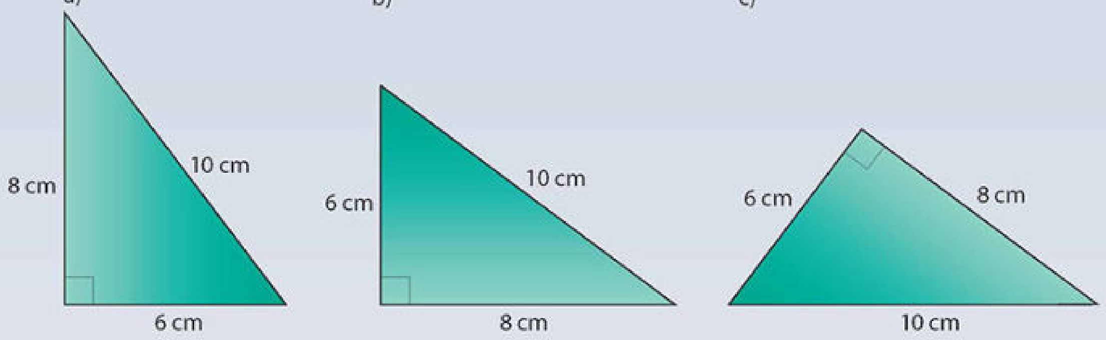
c) Volumen de un cilindro que tiene 3 cm de radio y 12 cm de altura	d) Volumen de un cono que tiene 3 cm de radio y 12 cm de altura
• Diámetro de la base: • Altura: • Volumen:	• Diámetro de la base: • Altura: • Volumen:

- Observa los resultados de los volúmenes. ¿Cuántas veces cabe el volumen del cono en el cilindro?

- ¿A qué conclusión llegas con respecto al volumen si se tiene un cilindro y un cono con la misma altura y el mismo radio?
- Discute la respuesta con un compañero; escriban sus conclusiones y valídenlas con el profesor.

Supera el reto

1. Construye y recorta un triángulo rectángulo de 6, 8 y 10 cm.
   a) Rótalo de modo que cada uno de sus lados sea la base, como se muestra en la imagen.



   b) Haz girar cada una de las figuras obtenidas tomando como eje de rotación su altura correspondiente.
   - ¿Qué cuerpo geométrico se generó en los tres casos? _______________
   - ¿Cuánto mide la altura del triángulo A? _______________________
   - ¿Cuánto mide la altura del triángulo B? _______________________
   - ¿Cuánto mide la altura del triángulo C? _______________________
   - ¿Cuál de los tres cuerpos que se generan tiene mayor volumen? ___________
   - ¿Cómo se obtiene el volumen? ___________________________

Comenten con sus compañeros de grupo sus respuestas.

Medida

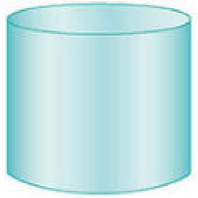
Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

Lección 42. Cálculo de volúmenes mediante estimación y obtención de los radios y alturas de conos y cilindros

1. En equipos, estimen los resultados de los siguientes problemas sin utilizar ningún instrumento de cálculo ni escribir operaciones.
   a) Con un recipiente de 5 litros de agua se van a llenar vasos de papel en forma de cono cuyo diámetro es de 8 cm y altura de 10 cm. ¿Aproximadamente para cuántos vasos alcanzará el agua si no se desperdicia?
   - Si en lugar de ser vasos en forma de cono tuvieran forma de cilindro y sus medidas fueran las mismas (diámetro: 8 cm y altura: 10 cm), ¿cuántos vasos se podrían llenar?
   - ¿De qué tipo de vasos se necesita más cantidad? ¿Por qué?

   b) Comprueben sus resultados con el uso de la calculadora.
   - ¿Cuál fue su resultado para el problema de los vasos en forma de cono?
   - ¿Cuál fue el resultado para el problema de los vasos cilíndricos?
   - Al hacer su estimación de resultado, ¿qué tanto se acercaron al correcto?, ¿por cuánto fallaron en su estimación?

   c) Se tienen 2 cajas, una en forma de cono y la otra cilíndrica, ambas con un radio igual a 10 cm y de volumen 5 000 cm^3, ¿cuánto medirá la altura de cada caja? Completa la tabla.

Cajas	Volumen (cm^3)	Radio (cm)	Altura estimada (cm)	Medida real (cm)	Diferencia
 Caja 1	5 000	10			
 Caja 2	5 000	10			

B5

Idea matemática

La estimación es una habilidad matemática que nos permite hacer un cálculo razonable para la solución de un problema sin necesidad de utilizar instrumentos de cálculo.

- ¿Qué estrategia llevaron a cabo para estimar la altura de las cajas?
- ¿Cuál fue su método para calcular la medida real de la altura de las cajas?
- Si hubieran conocido la medida de la altura e hiciera falta la del radio, ¿qué hubieran hecho para calcular esta última?
- Comparen y revisen sus resultados y procedimientos con el resto del grupo. ¿Todos siguieron la misma estrategia? Escriban la que les haya parecido más sencilla.
- Con apoyo del profesor y los compañeros del grupo, determinen hasta dónde es aceptable un margen de error en estimación de resultados y escriban la conclusión a la que llegaron.

Supera el reto

De manera individual, resuelve el siguiente problema.
Se pretende desocupar un contenedor cilíndrico de 2 m de diámetro y 8 m de altura que está lleno de arroz. Se cuenta con tres silos de distintas dimensiones. ¿Cuántos silos de cada uno se necesitan para vaciarlo?

a) Para responder la pregunta, completa la tabla a partir de una estimación del volumen sin el uso de la calculadora.

	Diámetro (m)	Altura (m)	Estimación del volumen	Cantidad de silos necesarios.
Silo A	2	6		
Silo B	3	4		
Silo C	4	2		

- ¿De cuáles silos se necesitarían menos para almacenar el arroz?
- ¿De cuáles silos se necesitaría mayor número para guardar el arroz?

b) Haz el cálculo real del volumen con la calculadora y comprueba qué tan acertada fue tu estimación.

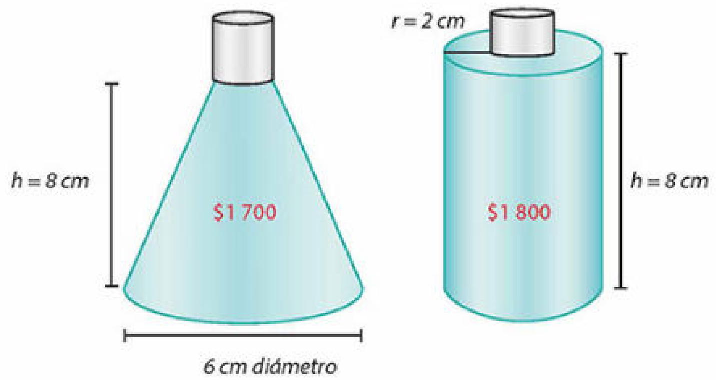
	Estimación del volumen	Número de silos	Cálculo real del volumen	Cantidad de silos necesarios.
Silo A				
Silo B				
Silo C				

- ¿Cuánto fue la diferencia en el cálculo del volumen del silo A?
- ¿Cuánto fue la diferencia en el cálculo del volumen del silo B?
- ¿Cuánto fue la diferencia en el cálculo del volumen del silo C?
- ¿Qué tan aceptable fue tu margen de error en la estimación que hiciste?

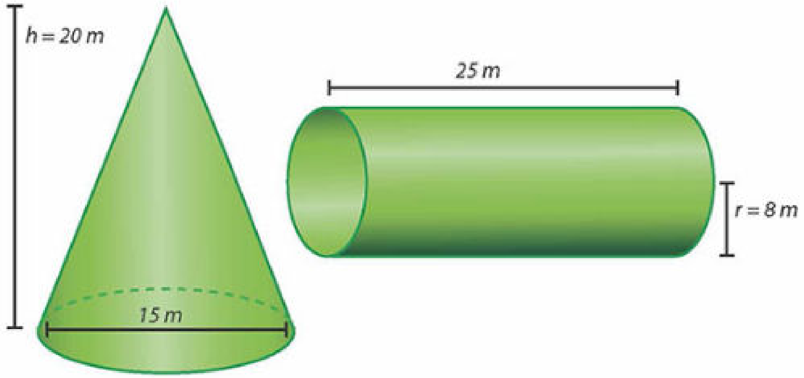
2. De forma individual resuelve los siguientes problemas.

a) Se pretende colocar un tinaco de forma cilíndrica cuya base ocupe 1.10 m² y se desea que su altura mida 1.20 m. ¿Qué espacio ocupará dicho tinaco?
- Si 1 m³ = 1 000 litros, ¿cuántos litros cabrán en el tinaco?

b) Un perfume se vende en dos tipos de envase. A partir de la información que se te proporciona en la imagen, determina cuál de los dos envases conviene comprar, ¿por qué?



c) En un granero hay dos contenedores de maíz de distinta forma y tamaño.



- A partir de la información que se muestra en la imagen responde: ¿cuál de los dos graneros ocupa mayor espacio?

d) El volumen de un tambor de forma cilíndrica mide 3 297 cm³, ¿cuál es la medida de su radio si de altura mide 42 cm?

e) Se pretende acomodar botes de forma cilíndrica en una habitación que mide 3 m de largo, 95 cm de ancho y 1.95 m de altura. ¿Cuántos botes cabrán si cada uno mide 30 cm de diámetro y 32 cm de altura?

f) Un chocolate de forma cónica tiene un volumen de 7.065 cm³ y su radio mide 1.5 cm. ¿Cuánto medirá su altura?

g) De 5 tubos de asbesto se conocen los siguientes datos. Calcula las medidas faltantes en la tabla y responde:

Largo (m)	Radio (m)	Volumen (m^3)
2		7.598
4		
		22.79
8		
	1.10	

- ¿Qué sucede con la medida del radio de los tubos?
- El largo de los tubos, ¿aumenta o disminuye?
- ¿Cómo varían la altura y el volumen de los tubos?
- ¿De qué tipo de variación se trata?

h) Se conocen los siguientes datos de 5 conos, calcula las medidas que faltan.

Altura (m)	Radio (m)	Volumen (m^3)
2		2.533
4		
		7.60
8		
	1.10	

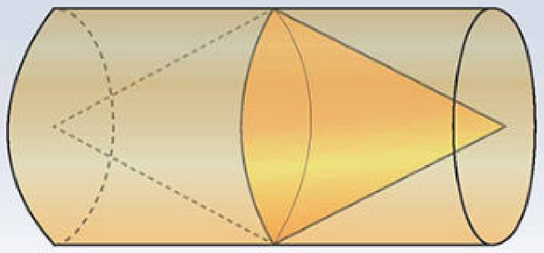
- ¿Qué sucede con la medida del radio de los conos?
- El largo de los conos, ¿aumenta o disminuye?
- ¿Cómo varían la altura y el volumen de los conos?
- ¿De qué tipo de variación se trata?

i) Observa las tablas de los incisos 7 y 8, ¿qué sucede con el volumen de un cono y un cilindro que tienen la misma altura y el mismo radio? Revisen en grupo sus respuestas y procedimientos.

Supera el reto

Con cartón, construye dos conos iguales y un cilindro cuyo radio sea igual al de los conos y con altura igual al doble de la de un cono. Calcula el espacio que queda vacío dentro del cilindro.

¿Cuál fue el resultado? Escribe en tu cuaderno el procedimiento que utilizaste para encontrar la solución.



Proporcionalidad y funciones

Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades

Lección 43. Aplicaciones de ecuaciones lineales y cuadráticas

Supera el reto

En equipo, analicen las siguientes situaciones y realicen lo que se solicita.

a) Edna recibió por una inversión un interés del 9.5%. Seleccionen la expresión que representa la relación entre la inversión y el interés obtenido.

a) $y = 9.5x$ b) $y = 9.5 + x$ c) $y = \frac{x}{9.5}$

- Justifiquen su respuesta. ____________
- ¿Qué tipo de variación se presenta en esta situación? ____________

b) La edad de Carlos es el cuadrado de la edad de Juan disminuida en un año. ¿Cuál es la expresión con la que se podría resolver esta situación?

a) $y = x - 1^2$ b) $y = 2x - 1$ c) $y = x^2 - 1$

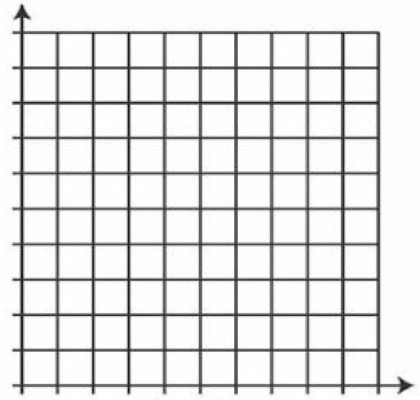
- Justifiquen su respuesta. ____________
- ¿Qué tipo de variación se presenta en esta situación? ____________
- En grupo, revisen y validen sus respuestas.

1. En equipo realicen lo que se indica.

a) Completen las tablas relacionadas con las situaciones anteriores.
b) Tracen la gráfica correspondiente a cada situación.
c) A partir de sus resultados respondan las preguntas.

Situación 1

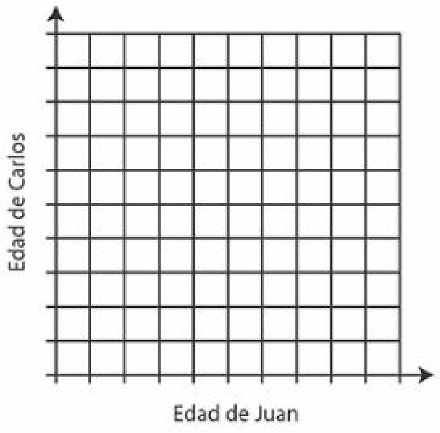
Inversión	Interés recibido
5 000	
10 000	
15 000	
20 000	
25 000	



- ¿Cuál es el interés que recibirá Edna por una inversión de $1 000 000?

Situación 2

Edad de Juan	Edad de Carlos
1	
2	
3	
4	
5	



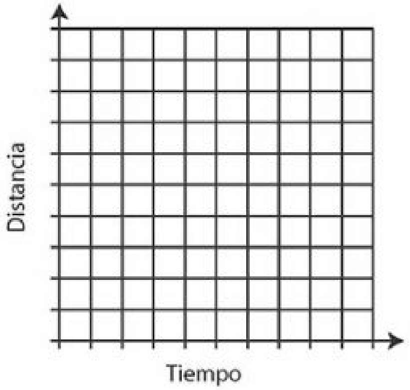
- ¿Cuál será la edad de Carlos cuando Juan tenga 8 años?

d) ¿Cuál es la ventaja de obtener una expresión algebraica para este tipo de situaciones?
e) ¿Para qué es útil la elaboración de una tabla en estas situaciones?
f) ¿Cómo puede favorecer la elaboración de una gráfica al representar variaciones?
g) ¿Cuál de los tres métodos; algebraico, tabular o gráfico puede favorecer de manera óptima la solución de este tipo de situaciones? Justifiquen su respuesta.
h) En grupo y con apoyo del profesor revisen sus respuestas.

2. En equipos resuelvan las siguientes situaciones.

a) Un objeto lanzado en caída libre desde un helicóptero recorre 4.9 m cada segundo.
- Conociendo que el desplazamiento en caída libre se comporta como una función cuadrática del tiempo. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación de la distancia recorrida *(d)* en función del tiempo transcurrido *(t)*?
- A partir de la expresión anterior, completa la tabla y traza la gráfica que corresponde.

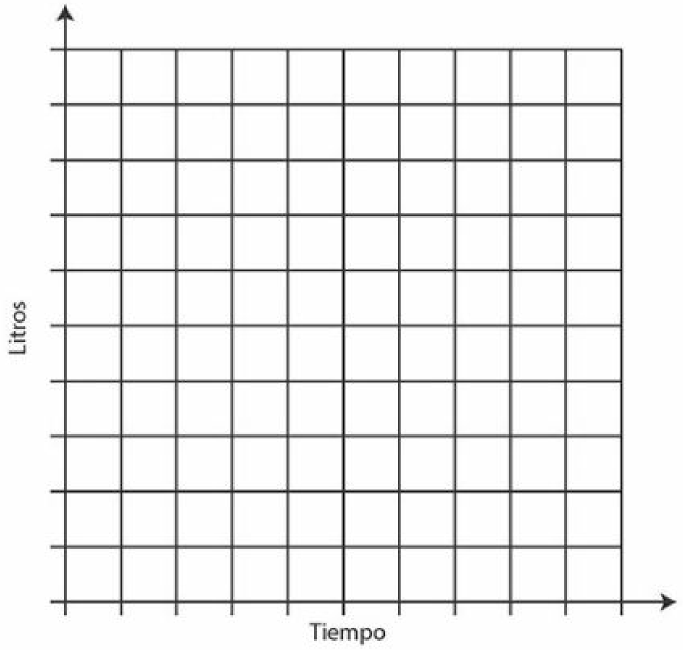
Tiempo	Distancia
1	
2	
3	
4	
5	



- ¿Qué distancia habrá recorrido el objeto en 5 segundos?
- ¿A qué distancia respecto al suelo se encontraría el helicóptero, si el objeto hubiera tardado en caer 10 segundos?
- ¿Qué utilidad tuvo la expresión algebraica que encontraron para obtener las respuestas de las preguntas anteriores?
- ¿Qué información puede aportar la gráfica?

b) Un estanque de agua se llena a una razón de 10 litros por segundo. ¿Cuánto tiempo *(t)* tardará en llenarse, si su capacidad *(c)* es de 90 000 litros?

- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la situación?
- ¿Cuánto tiempo se tardaría en llenar un estanque con medio millón de litros de capacidad?
- En esta razón de llenado, ¿qué cantidad de agua se habría vaciado en 2 horas?
- Explica el procedimiento que utilizaste para hallar las respuestas.
- Traza la gráfica correspondiente.



c) Un patio tiene una determinada área *(A)*, se sabe que el largo *(l)* mide el triple de su ancho *(a)*.

- ¿Cuál es la expresión que representa la relación de estos datos y que permitiría encontrar la solución?
- ¿La relación que existe entre el largo y el ancho de este patio es proporcional? ¿Por qué?
- Si el ancho del patio mide 20 metros, ¿cuánto mide su largo?, ¿cuál es su área?
- Si la medida del ancho se duplicara, ¿habrá proporcionalidad entre sus medidas? ¿Por qué?
- Al duplicar el ancho del patio, su medida sería de 40 metros, ¿Cuál sería su área?
- ¿Qué tipo de variación representa la relación de las dimensiones del patio?
- ¿Qué tipo de variación representa la relación de las áreas?

d) Rocío tiene en el banco $5 000 más que el doble de la cantidad de dinero que tiene María.

- ¿Cuál es la expresión que representa la relación entre la cantidad de dinero que tiene Rocío *(r)* y la que tiene María *(m)*?
- Si varía la cantidad de dinero que tiene Rocío, ¿varía la cantidad que tiene María? ¿Por qué?
- Si varía la cantidad de dinero que tiene María, ¿varía la que tiene Rocío? ¿Por qué?
- ¿La variación entre estas cantidades es proporcional? ¿Por qué?

e) Don Alberto invirtió en el banco una cierta cantidad de dinero; le ofrecieron una taza de interés fija mensual para que mes con mes se reinvirtiera su dinero con el interés acumulado.

- ¿Cuál es la expresión que determina cuánto dinero le debería entregar el banco al año de su inversión, si la taza que le ofrecieron es del 4%?
- ¿Cuánto habrá acumulado a los 3 meses?
- ¿Cuánto habrá acumulado a los 6 meses?
- ¿Qué tipo de variación representa la relación entre la cantidad invertida y el capital acumulado?
- En grupo revisen y validen los procedimientos empleados.

Supera el reto

Tres empresas rentan computadoras. Por el alquiler de un equipo, la empresa A cobra $1 500 al mes además de $40 por hora de uso; la empresa B cobra $80 por cada hora de uso y la empresa C cobra $2 500 al mes más $25 por hora de uso. ¿Cuál es la expresión que corresponde a la relación de datos de cada empresa?

Empresa A: ____________ Empresa B: ____________ Empresa C: ____________

Si las condiciones de las computadoras y del contrato fueran las mismas en cualquiera de las empresas, ¿en cuál de ellas se pagaría menos por el alquiler? Justifica tu respuesta.

Nociones de Probabilidad

Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables

Lección 44. Juegos equiprobables y no equiprobables

1. Observa cada figura y reflexiona acerca de cuáles no son juegos de azar. Si no sabes las reglas de alguno, pide a tu profesor que las explique.

a) Comparte tu opinión con tus compañeros y argumenta tu respuesta.
b) ¿Qué otros juegos de mesa de azar conoces?
c) ¿Qué otros factores influyen en los juegos que no son de azar?
d) Formen 2 equipos y debatan si el dominó es un juego de azar o no. Anoten en sus cuadernos los argumentos a favor y en contra. El profesor será el mediador para que establezcan una conclusión.

2. Responde a los siguientes planteamientos.
a) En un volado, ¿cuál es la probabilidad de obtener cada una de sus caras?
b) Al lanzar un dado ¿qué probabilidad se tiene de obtener cada una de sus caras?
   - En los dos ejemplos anteriores, ¿cómo son las probabilidades de los eventos?, ¿algún evento tiene ventaja sobre otro?
c) Se tienen dos eventos formados a partir del lanzamiento de un dado: A= {obtener un número mayor a 2}, B= {obtener el número 1}.
   - ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los eventos?
   - ¿Cómo son las probabilidades del evento A y del evento B?

Según sus probabilidades, describe las diferencias entre los eventos de los incisos a), b) y c).

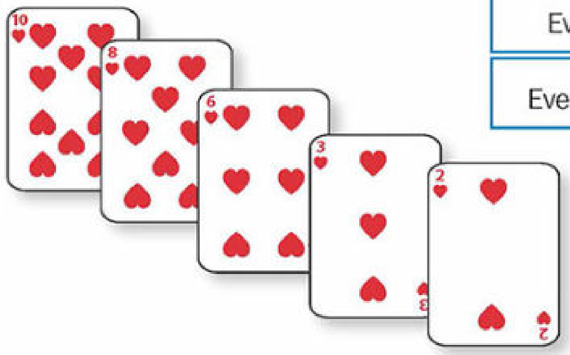
Supera el reto

Individualmente, analiza los siguientes eventos e indica si son o no equiprobables.

a) Que este año sea bisiesto.
b) Qué un número primo sea par.
c) El posible sexo del futuro bebé de una mujer embarazada.
d) Sacar un naipe de la baraja y que sea con figura de color rojo.
e) Que la siguiente llanta que se ponche de un auto sea la del lado del conductor.
f) Que un divisor de 20 sea divisor de 40.
g) Que al lanzar un dado se obtenga un número par.

3. Reúnete con un compañero para construir 2 eventos: uno equiprobable y uno no equiprobable, a partir de los juegos de azar que se proponen.

a)



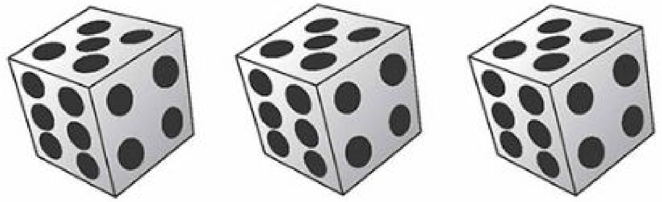
Evento equiprobable

Evento no equiprobable

b)

Evento equiprobable

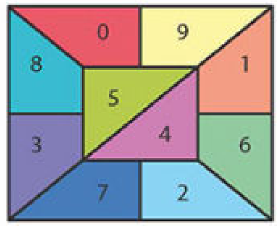
Evento no equiprobable



Idea matemática

Eventos equiprobables. Son aquellos en los que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir.
Eventos no equiprobables. Son aquellos cuyos resultados no tienen la misma probabilidad de ocurrir y alguna de las probabilidades tendrá ventaja sobre las otras.
Los eventos no equiprobables deben buscar la manera de hacer justas las probabilidades.

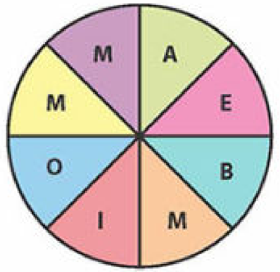
c)



Evento equiprobable

Evento no equiprobable

d)



Evento equiprobable

Evento no equiprobable

- ¿Qué dificultades encontraste al hacer la actividad?
- ¿Qué tipo de eventos te resultó más fácil construir?

4. Sabiendo que en un partido de fútbol, un equipo puede ganar, empatar o perder:

a) ¿El juego se considera equiprobable? Justifica tu respuesta.
b) A partir de tus resultados anteriores, determina si el juego es o no justo.

5. ¿Qué opinas de la afirmación "es un juego de azar, pero no es justo"?

6. ¿Qué se te ocurre para hacer un juego de azar justo?

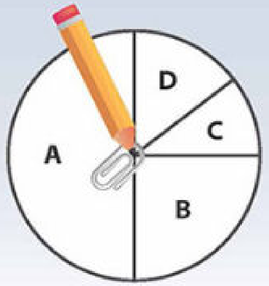
7. Metan en una bolsa opaca 3 papelitos (2 rojos y uno azul).

- El que escoja los rojos y obtenga ese color se anotará un punto.
- El que elija azul se anotará 2 puntos cada que obtenga ese color.
- Registren 7 tiradas y verifiquen quien ganó. Repitan la actividad dando el mismo valor a cada color, ¿quién ganó?, ¿qué concluyen de esta actividad?

COLOR	PUNTOS							TOTAL
ROJO 1 punto								
AZUL 1 punto								

Supera el reto

Construye en tu cuaderno una ruleta similar a la de la imagen, con 10 cm de diámetro.
Antes de jugar, responde.



a) Si se tirara 50 veces y alguien asegura que la *A* ganará. ¿Qué opinas?
b) Elabora 2 eventos equiprobables y 3 no equiprobables.
c) Juega y comprueba si la *A* gana.

Lo que aprendí

Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta cuando corresponda.

1. La suma de 3 enteros pares consecutivos es 72. ¿Cuál es la ecuación que plantea esta situación?

   a) $x + 2x + 4x = 72$

   b) $x + (x + 1) + (x + 2) = 72$

   c) $2x + 2(x + 1) + 2(x + 2) = 72$

   d) $x + (x + 2) + (x + 4) = 72$

2. Juan pensó en un número, lo elevó al cuadrado, multiplicó el resultado por 4 y obtuvo 100. ¿Qué número pensó?

   a) 5
   b) 4
   c) 10
   d) 24

3. En una exposición de la secundaria, mostraron arañas y cangrejos. Se contaron 168 extremidades y 19 cabezas. ¿Cuántos animales hay de cada clase, si se sabe que las arañas tienen 8 patas y los cangrejos 10?

   a) 8 arañas y 11 cangrejos
   b) 11 arañas y 8 cangrejos
   c) 10 arañas y 9 cangrejos
   d) 11 arañas y 9 cangrejos

4. La temperatura de una ciudad en Estados Unidos de América es de 78 grados Fahrenheit, un turista quiere saber a cuántos grados Celsius equivale esta temperatura, sabiendo que la conversión a Celsius es el resultado del producto de $\frac{5}{9}$ por la temperatura conocida disminuida en 32.

   ¿Cuál de las expresiones representa la relación entre las variables?

   a) $y = (\frac{5}{9})(x - 32)$

   b) $y = (x)(\frac{5}{9}) - 32$

   c) $y = x - 32(\frac{5}{9})$

   d) $y = (32 - \frac{5}{9})(x)$

5. Se desea alquilar un automóvil y la arrendadora cobra $200 al día más $8 por kilómetro recorrido. ¿Cómo se representa esta relación de datos?

   a) $y = x + 8 + 200$

   b) $y = (8x)(200)$

   c) $y = (x + 8)\ 200$

   d) $y = 8x + 200$

6. ¿Qué curva se obtiene cuando realizas un corte perpendicular a la base de un cono con un plano? ______________________

7. ¿Qué curva se obtiene cuando realizas un corte paralelo a la base de un cilindro con un plano? ______________________

8. Completa la siguiente tabla para encontrar los radios de un cono cuando se hacen cortes centímetro a centímetro y realiza la gráfica correspondiente.

Altura	Radio
8	3
7	
6	
5	

9. ¿Cuál es la cantidad de helado que cabe en un barquillo que tiene forma cónica y que mide 10.75 cm de altura y 2.3 cm de radio?

   a) $16.61\ cm^3$
   b) $178.56\ cm^3$
   c) $59.52\ cm^3$
   d) 1 litro

10. Es un ejemplo de evento equiprobable:

    a) Que al voltear una carta sea un corazón o un rey

    b) Que al tirar un dado salga un número impar o un número primo

    c) Que al haber un partido de futbol se gane o se pierda

    d) Que al lanzar una moneda salga águila o sol

Mi prueba PISA

Resuelve los ejercicios y elige la opción correcta.

1. Relaciona las columnas anotando la letra que corresponde al modelo que plantea cada problema.

( ) Si le regalan a Rocío 5 pesos, tendrá ahorrados en total $250, ¿cuánto dinero tiene originalmente?	A) $n - (0.05)n = 250$
( ) Laura compró una blusa que costaba $250, pero le hicieron el 5% de descuento. ¿Cuánto pagó por la blusa?	B) $5n = 250$
( ) ¿Cuál es el precio original de un CD de música, si había 5% de descuento y Pedro pagó $250 incluido el descuento?	C) $n + 5 = 250$
( ) 5 hermanos fueron al futbol, en total pagaron $250 por los boletos. ¿Cuánto costó cada boleto?	D) $n = 250 - (0.05)250$

Escribe, delante de cada inciso, lo que representa la incógnita en cada caso del ejercicio anterior.

A) ____________________
B) ____________________
C) ____________________
D) ____________________

2. ¿Cuál es el volumen de un barril de petróleo que tiene un diámetro de 3 m en la base y una altura de 2 m?

A) 14.13 m³
B) 14.50 m³
C) 15.75 m³
D) 16 m³

3. ¿Cuál es la curva que se obtiene al cortar un cono con un plano inclinado que no toca a la base?

A) Parábola
B) Hipérbola
C) Elipse
D) Círculo

4. El volumen de un cono es:

A) El triple del volumen del cilindro
B) La tercera parte del volumen del cilindro
C) El doble del volumen del cilindro
D) La mitad del volumen de un cilindro

5. Se sabe que el volumen de un cono cuyo radio de su base mide 2 cm y su altura es de 5 cm es de 20.93 cm³. ¿Cuánto medirá el volumen de un cilindro con esas mismas medidas?

A) 60 cm³ B) 62.79 cm³ C) 59.97 cm³ D) 70.20 cm³

6. La densidad (ρ) de una sustancia medida en un laboratorio es el resultado del cociente de su masa (m) dividida por su volumen (v). ¿Qué expresión representa la relación de las variables?

A) $\rho = (m)(v)$ B) $\rho = v/m$ C) $\rho = m/v$ D) $\rho = d(m/v)$

7. La edad de Carlos (y) duplica el cuadrado de la edad de Víctor (x). ¿Cuál es la expresión que determina la relación entre las variables?

A) $y = (2x)^2$ B) $y = 2x + 2^2$ C) $y = 2x^2$ D) $y = (2x + 2)^2$

8. En el experimento de lanzar un dado se consideran dos eventos, el evento $A = \{obtener\ un\ número\ par\}$ y el evento $B = \{obtener\ un\ número\ impar\}$. ¿Los eventos A, B son o no equiprobables?, ¿apostar por un número par sería o no un juego justo?

A) Los eventos A, B no son equiprobables y apostar por un número par no sería un juego justo.
B) Los eventos A, B son equiprobables pero apostar por un número par no sería un juego justo.
C) Los eventos A, B son equiprobables y apostar por un número par es un juego justo.
D) Los eventos A, B no son equiprobables pero apostar por un número par es un juego justo.

Bibliografía

Para el alumno

Enzensberger, H., *El Diablo de los números*, Madrid, Siruela, 2013.
Fuenlabrada, I., *Juega y aprende matemáticas*, México, SEP, 1997.
Ibáñez, P. y Gerardo García, *Matemáticas I: Aritmética y Álgebra*, México, Thomson Learning, 2006.
Perelman, Y., *Álgebra recreativa*, Moscú, Mir, 1988.
Portilla, E., *Estadística*, México, Interamericana, 1990.
Sierra, J., *El asesinato del profesor de Matemáticas*, México, Alianza Editorial Mexicana, 2003.
Tahan, M., *El hombre que calculaba*, México, Limusa, 2002.
—*Matemática divertida y curiosa*, Buenos Aires, Pluma y papel, 2006.

Para el maestro

Allen, A., *Álgebra intermedia*, México, Prentice Hall Hispanoamericana, 2000.
Alsina, C., *Materiales para construir la geometría*, España, Editorial Síntesis, 2008.
Espinoza, H., *Fichero de actividades didácticas*, México, SEP, 1999.
Frade, L., *Desarrollo de competencias en educación: desde preescolar hasta bachillerato*, México, Calidad Educativa Consultores, 2008.
Frola, P., *Competencias docentes para la evaluación: diseño de reactivos para evaluar el aprendizaje*, México, Trillas, 2010.
Ibáñez, P. y Gerardo García, *Matemáticas I: Aritmética y Álgebra*, México, Thomson Learning, 2006.
Leithold, L., *Álgebra*, México, Oxford University Press, 2005.
Mochón, S., *Desarrollando conceptos de aritmética por medio de actividades de construcción y exploración en la hoja de cálculo*, México, McGraw Hill Interamericana, 2004.
Polya, G., *¿Cómo plantear y resolver problemas?*, México, Trillas, 2011.
Sonia Ursini *et al.*, *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa*, México, Trillas, 2005.

General

Andradas Heranz, C., *Póngame un Kilo de matemáticas*, Madrid, SM, 2000.
Britton J. e Ignacio Bello, *Matemáticas contemporáneas*, México, Harla, 2002.
Caballero, A., *Geometría analítica*, México, Esfinge, 2000.
Carpinteiro, E. y Rubén Sánchez, *Álgebra*, México, Publicaciones cultural, 2002.
Casanova, Ma. A., *Evaluación educativa*, México, SEP/Muralla, 1998 (Biblioteca para la actualización del maestro).
Cedillo, T., *Sentido numérico e iniciación al álgebra. La calculadora en el salón de clases*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1999.
Clark, D., *Evaluación constructiva en matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 2002.
Fleming W. y Dale Varberg, *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, México, Prentice Hall, 1999.
Gómez, I., *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje Matemático*, Madrid, Narcea, 2000.
Gutiérrez, A., *Didáctica de la matemática*, Madrid, Síntesis, 2000.
Hargreaves, Andy *et al.*, *Una educación para el cambio. Reinventar la educación de los adolescentes*, México, SEP/Octaedro (Biblioteca para la actualización del maestro), 2000.
Mochón, S., *Desarrollando conceptos de álgebra*, México, Mc-Graw-Hill, 2004.
Moreno, L. y Guillermina Waldegg, *Aprendizaje, matemáticas y tecnología*, México, Santillana, 2004.
Ortega, T., *Conexiones matemáticas. Motivación del alumno y competencia matemática*, Barcelona, GRAÓ, 2005.
Smith, S., *Álgebra*, EUA, Addison Wesley Iberoamericana, 2001.
Stewart, I., *Baúl de tesoros matemáticos*, Barcelona, Crítica, 2010.
Swokowski, E., Álgebra y *trigonometría con geometría analítica*, México, Thomson, 2006.

Referencias electrónicas

Alianza para el Fortalecimiento en el Aprendizaje de las Matemáticas AFAMAC
http://afamac.uprm.edu/Talleres-Documentos/Congruenciay%20Semejanza.pdf (Consulta: 23 de enero de 2017).
Curso de geometría
http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/geoweb/movi4.htm (Consulta: 23 de enero de 2017).
Disfruta las Matemáticas
www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teorema-pitagoras.html (Consulta: 23 de enero de 2017).
Escuela Americana. El Salvador
http://www.amschool.edu.sv/paes/e6.htm (Consulta: 23 de enero de 2017).
Guía Interactiva para Secundaria GIS
https://app.box.com/s/4757545f65c49250a3bf (Consulta: 23 de enero de 2017).
Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/ecuacion.htm#4 (Consulta: 23 de enero de 2017).
Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado
http://descargas.pntic.mec.es/cedec/mat3/contenidos/u6/M3_U6_contenidos/11_teorema_de_thales.html (Consulta: 23 de enero de 2017).
La nube artística
http://www.lanubeartistica.es/Dibujo_Tecnico_Primero/UD2/dt1_U2_tema_2_v01/32_figuras_homotticas.html (Consulta: 23 de enero de 2017).
Plan Ceibal
http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/110919_conos.elp/cuerpos_de_revolucin.html (Consulta: 23 de enero de 2017).
Portal Académico CCH
http://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/aprende/matematicas2/semejanzatriangulos?page=0%2C2 (Consulta: 23 de enero de 2017).
Proyecto Descartes
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/Descartes1/Bach_CNST_1/Geometria_afin_analitica_plano_lugares_geometricos/Geometria6.htm (Consulta: 23 de enero de 2017).
Proyecto Descartes
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/ecuacion.htm#4
(Consulta: 23 de enero de 2017).
Proyecto Descartes
http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/2_segundo/2_Matematicas/2m_b04_t04_s01_descartes/doc/info.html
(Consulta: 23 de enero de 2017).
Quiz.uprm.edu Departamento de Ciencias Matemáticas
http://quiz.uprm.edu/tutorials_master/Cuad_Eq/cuadeq_home.html
(Consulta: 23 de enero de 2017).
Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales SAEM
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0045-01/secciones/problemas.html (Consulta: 23 de enero de 2017).
Sector matemática
http://www.sectormatematica.cl/Novedades/isometria.pdf (Consulta: 23 de enero de 2017).
Sitio web educativo
http://www.x.edu.uy/sencos.htm (Consulta: 23 de enero de 2017).
That Quiz
https://www.thatquiz.org/es/previewtest?Z/2/B/H/1VKZ1425488167
(Consulta: 23 de enero de 2017).
Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD
http://datateca.unad.edu.co/contenidos/100402/moduloexe/leccin_12_axiomas_de_probabilidad__regla_de_la_adicin.html (Consulta: 23 de enero de 2017).
Universidad Andrés Bello
http://www.preunab.cl/wp-content/uploads/2015/03/webinar16.pdf
(Consulta: 23 de enero de 2017).
Universidad Zaragoza
http://www.unizar.es/aragon_tres/unidad3/u3trigte20.pdf (Consulta: 23 de enero de 2017).

Matemáticas 3

Desafíos matemáticos

Ramírez • Castillo • Vergara • Flores • Azpeitia

Matemáticas 3, de la colección ***Desafíos matemáticos***, impulsa la puesta en práctica de las competencias matemáticas mediante el empleo de técnicas y razonamientos eficaces para resolver problemas personales, sociales y naturales, invitando a los estudiantes de tercer grado de secundaria a colaborar activamente en equipos de trabajo.

La metodología didáctica de esta obra favorece la construcción de conocimientos y habilidades con gran sentido y significado, gracias a ejercicios y actividades que representan desafíos intelectuales donde es necesario observar, analizar, interpretar y poner en juego la creatividad, a fin de resolver problemas en forma autónoma.

Mediante cápsulas y secciones de gran interés, los estudiantes serán capaces de formular y avalar conjeturas, valiéndose de procedimientos propios para plantear y resolver problemas que les permitan adquirir las herramientas y conocimientos matemáticos necesarios para analizar e interpretar sus ideas.

Con **Matemáticas 3**. ***Desafíos matemáticos***, parte primordial del acervo de **Fernández editores**, los alumnos comprenderán que las matemáticas no sólo son parte importante de su formación académica, sino herramienta esencial para triunfar en la vida.

www.fernandezeditores.com.mx
www.social.adiactiva.com.mx

ISBN: 978-607-498-468-2
9 786074 984682
S00165

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

FERNÁNDEZ editores